Séries de Fourier

Cours et exercices corrigés

Richard Gomez

10 octobre 2010

Table des matières

Résumé

Ce livre est une introduction aux séries de Fourier destinée aux étudiants de L2, aux élèves des classes préparatoires et aux candidats au CAPES ou à l'agrégation interne. Nous présentons le théorème de Fejér, le théorème de convergence en norme 2, l'égalité de Parseval et les théorèmes de Dirichlet de convergence normale et simple. Nous décrivons le phénomène de Gibbs et proposons une étude des équations de la chaleur et de la corde vibrante. Nous terminons avec une série d'exercices classiques.

Chapitre 1

Introdution

Etant donnée une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, 2π-périodique, on souhaiterait trouver des coefficients $(c_n; n \in \mathbb{Z})$ tels que f se développe en

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \tag{1.1}$$

ou, ce qui revient au même, trouver des coefficients $(a_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ et $(b_n;\ n \in \mathbb{N}^*)$ tels que f se développe en la série trigonométrique

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

En 1807, le mathématicien Joseph Fourier propose de prendre c_n égal à

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \tag{1.2}$$

Cette formule ne tombe pas du ciel, évidemment. On peut la comprendre en remarquant que la famille $(e_n\ ; n \in \mathbb{Z})$ des fonctions

$$e_n : t \longmapsto e^{int}$$

est orthonormale pour le « produit scalaire » défini par

$$\left\langle f, g \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\, \mathrm{dt}$$

et voir que (1.2) ne signifie rien d'autre que ceci :

$$c_n = \langle f, e_n \rangle$$

Ceci rappelle le calcul, dans un espace euclidien, de la composante x_i d'un vecteur $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$ dans une base orthonormée $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$; on rappelle que x_i est donné par

$$x_i = \langle u, \varepsilon_i \rangle$$

Ainsi, si on adopte les coefficients c_n donnés par (1.2), la somme partielle $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ est la projection orthogonale de f sur le sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ engendré par $\{e_{-n}, ..., e_0, ..., e_n\}$. Ce point de vue géométrique est adopté au chapitre ? et fournit une manière intéressante d'approximer les fonctions périodiques.

La série de fonctions définie par (1.1) et (1.2) est appelée série de Fourier associée à f. Pour que cette série existe il faut que toutes les intégrales (1.2) soient définies. C'est le cas si f est Riemann-intégrable sur $[0, 2\pi]$. Nous garantissons cette propriété en ne considérant que des fonctions continues par morceaux (c'est le minimum exigé dans ce livre).

Une fois la série de Fourier définie se pose la question de sa convergence (vers f si possible) et de la nature de cette convergence : ponctuelle, uniforme, normale, quadratique, etc. Malheureusement ces questions ne sont pas triviales, même avec des fonctions « gentilles ». En 1874, Paul David Gustave du Bois Reymond découvre en effet une fonction continue pour laquelle la série de Fourier ne converge même pas ponctuellement (voir exercice ?). Néanmoins, Lipot Fejér établit vers 1900 que si la fonction est « continue par morceaux », il y a convergence ponctuelle *au sens de Césaro*, et si elle est continue, convergence uniforme, toujours *au sens de Césaro*. Ce résultat possède une conséquence intéressante : si la série de Fourier converge en x, sa somme ne peut être que $f(x)$. C'est ce que nous verrons au chapitre ?.

Grâce au théorème de Fejér on peut montrer que si f est continue par morceaux, la série de Fourier converge vers f en moyenne quadratique : c'est le théorème de Parseval, nous l'étudions à la section ?.

Pour avoir la convergence uniforme il suffit que f soit continue et « C^1 par morceaux », ce qui est le cas pour la plupart des fonctions rencontrées dans les exercices ! Pour la convergence ponctuelle nous disposons d'un résultat fécond : si f possède une certaine régularité dans ses variations au voisiange de x, alors la série de Fourier converge en x vers la moyenne de $f(x^+)$ et $f(x^-)$. Ces deux résultats de convergence forment le théorème de Dirichlet et sont étudiés aux chapitres ? et ?.

Le chapitre ? est consacré au phénomène de Gibbs. Nous l'étudions sur un exemple précis. Les chapitres ? et ? sont consacrés à l'équation de la chaleur et de la corde vibrante. On y montre comment l'étude de ces équations a conduit aux séries trigonométriques. Nous donnons quelques repères historiques au chapitre ? et une série de douze exercices corrigés au chapitre ?.

L'étude des séries de Fourier fut capitale dans l'Histoire des mathématiques : elle obligea les mathématiciens à formaliser des notions telles que la continuité, la dérivabilité et la convergence selon divers modes. Elle inspira de nouvaux outils tels que l'intégrale de Lebesgues. Elle poussa Georg Cantor à concevoir une première théorie des ensembles (dans les années 1870). Elle fut à l'origine d'un domaine important des mathématiques : l'analyse fonctionnelle. On comprend pourquoi elles sont un excellent objet de révision pour ceux qui préparent un examen ou un concours.

Chapitre 2
Rappels sur les espaces préhilbertiens

Un de nos objectifs est de définir un espace fonctionnel muni d'un produit scalaire. Il s'agit d'un espace de fonctions 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ possédant certaines propriétés (continuité par morceaux, par exemple) appelé espace de Dirichlet. Ceci éclairera et précisera les problèmes posés en introduction. Aussi avons nous intérêt, dans un premier temps, à dégager les propriétés générales du produit scalaire. C'est le but de cette section.

Dans ce qui suit $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un espace préhilbertien est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire :

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (a,b) & \longmapsto & \langle a,b\rangle \end{array}$$

Signalons que dans le cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, on dit aussi que E est un espace hermitien et $\langle \bullet,\bullet\rangle$ un produit hermitien. On rappelle que

- si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, l'application $\langle \bullet,\bullet\rangle$ est bilinéaire, symétrique et définie positive,
- si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, l'application $\langle \bullet, b\rangle$ est linéaire, l'application $\langle a,\bullet\rangle$ est semi-linéaire et $\langle \bullet,\bullet\rangle$ est définie positive et vérifie la symétrie hermitienne :

$$\langle a,b\rangle = \overline{\langle b,a\rangle}$$

Ces propriétés permettent (dans les deux cas) de définir la norme

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ a & \longmapsto & \|a\|_2 = \sqrt{\langle a,a\rangle} \end{array}$$

appelée norme associée au produit scalaire, ou plus simplement norme 2. Ainsi les espaces préhilbertiens sont des espaces normés, donc métriques, donc topologiques. L'espace E considéré est désormais muni de la norme 2, de la métrique d_2 associée, et de la topologie associée à d_2. Si E est complet pour la norme 2, on dit que E est un espace de Hilbert. C'est le cas par exemple si E est de dimension finie. On suppose connues les notions d'orthogonalité et de sous-espace orthogonal à une partie de E.

Les espaces préhilbertiens sont le cadre idéal pour le théorème de Pythagore :

Théorème 2.1. *(Pythagore) Soient E un espace préhilbertien, a et b des éléments de E orthogonaux. On note $\|\bullet\|$ la norme 2 sur E. Alors $\|a+b\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2$.*

Démonstration. On démontre le théorème dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$; le cas complexe est laissé au lecteur. On a $\|a+b\|^2=\langle a+b,a+b\rangle=\langle a,a\rangle+2\langle a,b\rangle+\langle b,b\rangle$ (bilinéarité et symétrie). Par ailleurs $\langle a,b\rangle=0$, d'où le résultat. □

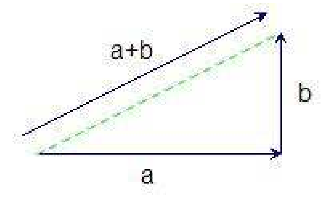


Figure 2.1. Le théorème de Pythagore

La réciproque de ce théorème n'est vraie que dans le cas réel.

Exercice 2.1. Soient a, b et c des éléments de l'espace préhilbertien E. Montrer les identités suivantes

i. $\|b-c\|^2 = \|b-a\|^2 + \|c-a\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle c-a, b-a\rangle$ (formule du triangle)

ii. $\|b-c\|^2 + 4\|a - \frac{1}{2}(b+c)\|^2 = 2\|a-b\|^2 + 2\|a-c\|^2$ (formule de la médiane)

iii. $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$ (règle du parallélogramme)

iv. $\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 = 2\langle a,b\rangle + 2\langle b,a\rangle$ (identité polaire)

v. $\left\langle a,b\right\rangle = \frac{\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 + i\|a-ib\|^2 - i\|a+ib\|^2}{4}$ (autre identité polaire)

Définition 2.2. *Soit E un espace préhilbertien et $\mathcal{F} = (e_i\ ;\ i \in I)$ une famille d'éléments de E. On dit que $\mathcal{F}$ est orthogonale si les e_i sont orthogonaux deux à deux, c'est à dire si*

$$\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \left\langle e_i, e_j \right\rangle = 0$$

Si de plus chaque e_i est de norme 1, on dit que $\mathcal{F}$ est orthonormée.

Autrement dit $\mathcal{F}$ est orthonormée si et seulement si pour tout $(i,j) \in I^2$,

$$\left\langle e_i, e_j \right\rangle = \delta_{i,j}$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$ et zéro sinon. On montre facilement que toute famille orthogonale (sans éléments nuls) est libre.

Si E est de dimension finie nous savons qu'il possède des bases orthonormées. En revanche si E est de dimension infinie ce résultat est faux. Cependant dans certains espaces préhilbertiens il peut exister une famille $\mathcal{H}$ orthonormée (donc libre) vérfiant la propriété suivante : tout élément peut être approché d'aussi près que l'on veut par une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{H}$ (la proximité ici est mesurée par la norme 2, bien entendu). On parle alors de base hilbertienne.

Définition 2.3. *Soit E un espace préhilbertien et $\mathcal{F} = (e_i\,;i \in I)$ une famille d'éléments de E.*

1. *On dit que $\mathcal{F}$ est totale si le sous-espace engendré par $\mathcal{F}$ est dense dans E*

$$\overline{\mathrm{vect}\langle \mathcal{F}\rangle} = E$$

2. *On dit que $\mathcal{F}$ est une base hilbertienne si $\mathcal{F}$ est totale et orthonormée.*

Il faut prendre garde au fait qu'une base hilbertienne n'est pas une base vectorielle. Il s'agit d'une notion topologique et non algébrique.

On sait montrer l'existence d'une base hilbertienne dans les cas suivants :

- cas où E est complet (i.e E est un espace de Hilbert). La démonstration nécessite l'axiome du choix et ne fournit donc aucun moyen explicite de construire cette « base ».
- cas où E est séparable. Autrement dit E possède une partie dénombrable dense (dans les cas les plus classiques c'est le théorème de Stone Weirerstrass qui fournit une telle partie). On peut dans ce cas construire explicitement une base hilbertienne par le procédé de Gram-Schmidt. Cette méthode est utilisée à la section ?.

Consulter [15] par exemple.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F et $F^\perp$ sont en somme directe mais nous n'avons pas forcément l'égalité $E = F \oplus F^\perp$, ni l'égalité $F^{\perp\perp} = F$ (dans le cas général nous n'avons que l'inclusion $F \subset F^{\perp\perp}$). Il est donc impossible en toute généralité de définir la projection orthogonale sur F ! Heureusement dans certains cas les choses se passent bien :

Théorème 2.4. *(Théorème de projection) Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors*

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

On insiste sur le fait que ce résultat est faux en général. Nous donnons la preuve de ce résultat sous forme d'exercice à la section ?. On trouve une étude complète de la projection dans [15].

Le théorème 2.4 permet de définir la projection orthogonale sur n'importe quel sous-espace F de dimension fini :

$$\begin{array}{rrcl} p_F \ : & E = F \oplus F^{\perp} & \longrightarrow & F \\ & a = f + g & \longmapsto & f \end{array}$$

La proposition qui suit montre comment calculer $p_F(a)$.

Proposition 2.5. *Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de dimension finie, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de F et $a \in E$. Alors*

$$p_F(a) = \sum_{k=1}^{n} \left\langle a, e_k \right\rangle e_k$$

Démonstration. Fixons $\ell \in \{1, \ldots, n\}$, notons $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de $p_F(a)$ dans $(e_1, \ldots, e_n)$ et décomposons a en

$$a = p_F(a) + b$$

où $b \in F^{\perp}$. De $a = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k + b$, on déduit, par linéarité de $\langle \bullet, e_\ell \rangle$, que

$$\langle a, e_\ell \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \left\langle e_k, e_\ell \right\rangle + \left\langle b, e_\ell \right\rangle$$

c'est à dire

$$\langle a, e_\ell \rangle = x_\ell \langle e_\ell, e_\ell \rangle = x_\ell$$

□

L'intérêt de $p_F(a)$ est d'être l'élément de F le plus proche de a (au sens de la norme 2). C'est ce que nous montrons après la définition ci-dessous.

Définition 2.6. *Soient E un espace préhilbertien, F une partie non vide de E et $a \in E$. La distance de a à F est le nombre*

$$d(a, F) = \inf \{d_2(a, f) \, ; f \in F\} = \inf \{\|a - f\|_2 \, ; f \in F\}$$

Théorème 2.7. *Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace de dimension finie et $a \in E$. Notons $\|\bullet\|$ la norme 2. Alors il existe un unique $f \in F$ tel que $d(a, F) = \|a - f\|$. Cet élément n'est autre que $p_F(a)$. De plus*

$$d(a, F)^2 = \|a\|^2 - \|p_F(a)\|^2 \tag{2.1}$$

en particulier

$$\|p_F(a)\| \leqslant \|a\| \tag{2.2}$$

On dit alors que $p_F(a)$ est *la* meilleure approximation de a par des éléments de F au sens de la norme 2.

Démonstration. Soit $g \in F$. On a $\|a - g\|^2 = \|(a - p_F(a)) + (p_F(a) - g)\|^2$ où $a - p_F(a) \in F^{\perp}$ et $p_F(a) - g \in F$. Ainsi, d'après le théorème de Pythagore

$$\|a - g\|^2 = \|a - p_F(a)\|^2 + \|p_F(a) - g\|^2 \tag{2.3}$$

Ceci montre que $\forall g \in F$, $\|a-g\| \geqslant \|a-p_F(a)\|$, et donc $d(a,F)=\|a-p_F(a)\|$ (on dit que $p_F(a)$ réalise la distance entre a et F). Prouvons l'unicité en supposant que $g \in F$ et $\|a-g\| = \|a-p_F(a)\|$.

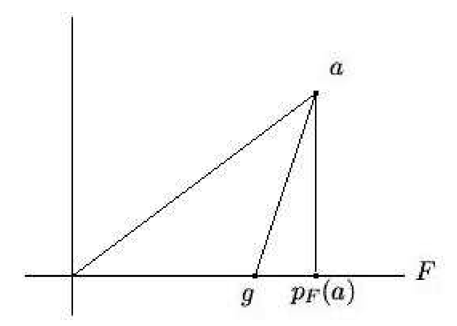


Figure 2.2.

L'égalité (2.3) implique alors $\|p_F(a)-g\|^2=0$, d'où $p_F(a)=g$. Par ailleurs, l'égalité (2.1) n'est que l'application du théorème de Pythagore aux vecteurs $a-p_F(a)$ et $p_F(a)$ qui sont bien orthogonaux. □

Remarque 2.8. L'inégalité (2.2) est appelée inégalité de Bessel. Elle nous dit que la projection orthogonale sur F réduit les normes. Il s'ensuit que p_F est une application (linéaire) continue. On montre facilement que la norme de p_F est 1. Voici une reformulation de cette inégalité :

Proposition 2.9. *(Inégalité de Bessel) Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace de dimension finie, $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de F et $a \in E$. Notons $\|\bullet\|$ la norme 2. Alors*

$$\sum_{k=1}^{n} |\left\langle a, e_i \right\rangle|^2 \leqslant \|a\|^2$$

Remarque 2.10. Le théorème 2.7 se généralise aux parties complètes, non vides et convexes de E (en particulier aux sous-espaces fermés). Voir ?.

On peut donner une version plus générale de l'inégalité de Bessel :

Proposition 2.11. *(Inégalité de Bessel). Soient E un espace préhilbertien, $(e_i;\ i \in I)$ une famille orthonormale de E et $a \in E$. Pour tout $i \in I$ on note $a_i = \langle a, e_i\rangle$. Alors $(a_i\ ;\ i \in I)$ est sommable et*

$$\sum_{i\in I} |a_i|^2 \leqslant \|a\|^2$$

Démonstration. D'après la proposition 2.9, pour tout partie finie J de I on a $\sum_{i\in J} |a_i|^2 \leqslant \|a\|^2$. Tous les termes étant positifs, ceci prouve que $(a_i\ ;\ i \in I)$ est sommable de somme inférieure à $\|a\|^2$. □

Il existe une caractérisation intéressante des bases hilbertiennes :

Théorème 2.12. *Soient E un espace préhilbertien et $(e_i; i \in I)$ une famille orthonormale de E. pour tout $x \in E$ et tout $i \in I$ on note $x_i = \langle x, e_i\rangle$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

i. Pour tous $x, y \in E$, $(x_i\,\bar{y_i}\,; i \in I)$ est sommable et

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} x_i\,\bar{y_i}$$

ii. Pour tout $x \in E$, $(|x_i|^2; i \in I)$ est sommable et

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |x_i|^2$$

iii. *Pour tout* $x \in E$, $(x_i\,; i \in I)$ *est sommable et*

$$x = \sum_{i \in I} x_i\, e_i$$

iv. *La famille* $(e_i\,; i \in I)$ *est totale.*

Démonstration.

1. Commençons par l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ étant évidente, nous supposons la proposition (ii). De l'inégalité $(a-b)^2 \geqslant 0$ on déduit $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$, pour tout couple de nombres réels (a, b). En l'appliquant à $|x_i\ \bar{y_i}|$ on obtient $|x_i\ \bar{y_i}| \leqslant \frac{|x_i|^2+|y_i|^2}{2}$, d'où l'on déduit que $(x_i\,\bar{y_i}\ ; i \in I)$ est sommable. Par symétrie, la famille $(\,\bar{x_i}\,y_i\,; i \in I)$ est également sommable. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x-iy\|^2 - i\,\|x+iy\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{i \in I} |x_i+y_i|^2 - \sum_{i \in I} |x_i-y_i|^2 + i \sum_{i \in I} |x_i - iy_i|^2 - i \sum_{i \in I} |x_i + iy_i|^2\right) \\ &= \sum_{i \in I} \frac{1}{4}\left(|x_i+y_i|^2 - |x_i-y_i|^2 + i\,|x_i-iy_i|^2 - i\,|x_i+iy_i|^2\right) = \sum_{i \in I} x_i\,\bar{y_i} \end{aligned}$$

   L'avant dernière égalité est justifiée par la sommabilité des cinq familles impliquées.

2. $(ii) \Rightarrow (iii)$. Soit $x \in E$. On fixe $\varepsilon > 0$. Il existe alors une partie finie J_0 de J telle que pour toute partie finie J de I contenant J_0 on ait

$$\left|\|x\|^2 - \sum_{i \in J} |x_i|^2\right| \leqslant \varepsilon^2 \qquad (2.4)$$

   (on peut même supprimer les barres puisque le membre de gauche est positif). D'après le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|\sum_{i \in J} x_i\, e_i\|^2 + \|\sum_{i \in J} x_i\, e_i - x\|^2$$

   c'est à dire

$$\|x\|^2 - \sum_{i \in J} |x_i|^2 = \|\sum_{i \in J} x_i\, e_i - x\|^2$$

   et l'inégalité (2.4) s'écrit

$$\|\sum_{i \in J} x_i\, e_i - x\|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

   d'où le résultat.

3. $(iii) \Rightarrow (iv)$: évident.

4. $(iv) \Rightarrow (ii)$. Soit $x \in E$. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors $y \in \mathrm{vect}\Big\langle e_i\,; i \in I\Big\rangle$ tel que $\|x-y\| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. On sait alors qu'il existe une partie finie J_0 de I telle que $y \in \mathrm{vect}\Big\langle e_i\ ;\ i \in J_0\Big\rangle$. Notons $F_0 = \mathrm{vect}\Big\langle e_i\,; i \in J_0\Big\rangle$. D'après le théorème de projection sur F_0, $\|x - p_{F_0}(x)\| \leqslant \|x-y\|$, et d'après le théorème de Pythagore, $\|x - p_{F_0}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i \in J_0} |x_i|^2$. On en déduit que $\|x\|^2 - \sum_{i \in J_0} |x_i|^2 \leqslant \varepsilon$. Soit maintenant J une partie finie de I contenant J_0. Notons $F = \mathrm{vect}\Big\langle e_i\,; i \in J\Big\rangle$. D'après le théorème de projection sur F, $\|x - p_F(x)\| \leqslant \|x - p_{F_0}(x)\|$, ce qui au carré donne $\|x\|^2 - \sum_{i \in J} |x_i|^2 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{i \in J_0} |x_i|^2 \leqslant \varepsilon$. On a prouvé que $(|x_i|^2\,; i \in I)$ est sommable de somme $\|x\|^2$. □

Chapitre 3
L'espace préhilbertien $\mathcal{D}$ de Dirichlet

Nous définissons ici un espace fonctionnel utile pour répondre aux questions posées en introduction : l'espace des *fonctions de Dirichlet*. Cet espace est muni d'un produit scalaire dont l'intérêt est de pouvoir projeter orthogonalement une fonction de Dirichlet quelconque sur certains sous-espaces. En l'occurence si $n \in \mathbb{N}$, nous projetons sur le sous-espace $\mathcal{P}_n$ engendré par l'ensemble $\{e_{-n}, ..., e_0, ..., e_n\}$ des fonctions e_k définies par

$$e_k \ : \ t \ \longmapsto \ e^{ikt}$$

Les éléments de $\mathcal{P}_n$ sont appelés polynomes trigonométriques de degré au plus n. Nous verrons que si f est à valeurs réelles, sa projection $p_n(f)$ est une combinaison linéaire réelle de la forme

$$t \longmapsto a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + ... + a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

Nous montrerons que la projection $p_n(f)$ est le polynome trigonométrique de degré au plus n le plus proche de f (au sens de la norme associée au produit scalaire), ce qui fait de la projection orthogonale un outil d'approximation des fonctions.

3.1 Fonctions de Dirichlet et produit scalaire

Définition 3.1. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux si*

1. *dans chaque compact de $\mathbb{R}$, f ne possède qu'un nombre fini de discontinuités,*
2. *et f possède une limite à gauche et une limite à droite en tout point.*

L'item 2 interdit ce type de discontinuité :

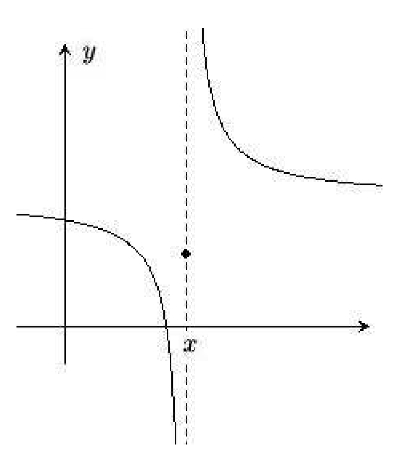


Figure 3.1. Point de discontinuité x où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ n'existent pas ; dans ce cas précis f explose au voisinage de x.

L'un des intérêt des fonctions continues par morceaux est leur intégrabilité sur les compacts :

Proposition 3.2. *Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Alors le module de f est Riemann-intégrable (on dit alors que f est intégrable).*

Définition 3.3. *Soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. *On dit que* f *est une fonction de Dirichlet si elle est*

1. 2π*-périodique,*
2. *continue par morceaux,*
3. *et* $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

On note $\mathcal{D}$ *l'ensemble des fonctions de Dirichlet.*

L'item 3 est une sorte de normalisation des fonctions 2π-périodiques continues par morceaux. Si f vérifie seulement les items 1 et 2, il suffit de modifier ses valeurs en chaque point de discontinuité pour obtenir une fonction $\tilde{f}$ qui elle sera de Dirichlet et contiendra la « même information ». La fonction $\tilde{f}$ est appelée la régularisée de Dirichlet de f (voir figure ci-dessous).

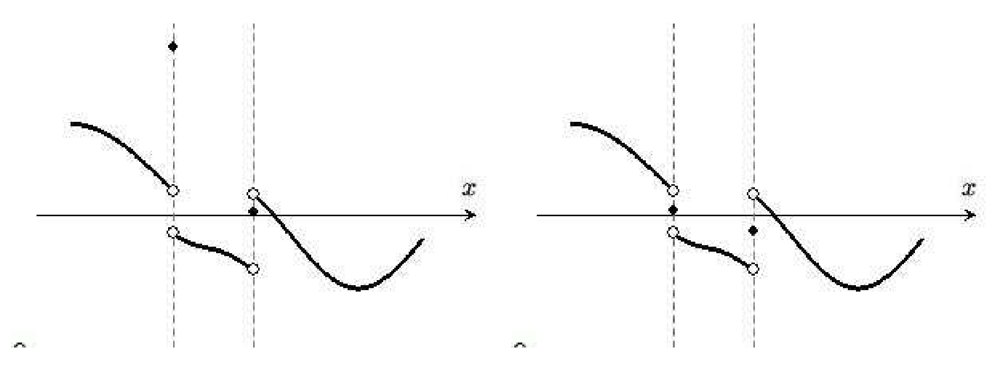


Figure 3.2. A gauche une fonction f. A droite, sa régularisée $\tilde{f}$.

On rappelle que $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$.

Proposition 3.4. *L'ensemble* $\mathcal{D}$ *des fonctions de Dirichlet est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. *De plus, l'application*

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{D}\times\mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ (f,g) & \longmapsto & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt\end{array} \tag{3.1}$$

est un produit scalaire (produit hermitien).

Démonstration. Le fait que $\mathcal{D}$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ ne pose aucun problème. Notons ϕ l'application $\mathcal{D}^2\to\mathbb{C}$ définie par (3.1). Si f et g sont des fonctions de Dirichlet, alors $f\,\bar{g}$ est aussi de Dirichlet et donc est intégrable sur chaque compact de $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0,2\pi]$. Ceci prouve que ϕ est bien définie. La sesquilinéarité, la symétrie hermitienne et la positivité de ϕ ne posent aucune difficulté : la sesquilinéarité provient entre autre des propriétés de linéarité de l'intégrale, et la positivité vient de la positivité de $\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt$. Concentrons nous sur la définitivité. Soit $f\in\mathcal{D}$ telle que $\phi(f,f)=0$. Notons $x_1<x_2<\ldots<x_N$ les points de discontinuité de f dans $[0,2\pi[$, $x_0=0$ et $x_{N+1}=2\pi$. On a

$$0=\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt=\sum_{k=0}^{N}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f(t)|^2\,dt$$

et comme chaque terme est positif, chaque terme est nul. Fixons $k\in\{0,\ldots,N\}$. Quitte à changer les valeurs de f en x_k et x_{k+1} nous pouvons supposer que $f_{|[x_k,x_{k+1}]}$ est continue (on mesure ici l'intérêt de la définition 3.1). De $\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f(t)|^2\,dt=0$ on déduit alors que f est nulle sur $[x_k,\ x_{k+1}]$. En vérité c'est sur $]x_k,\ x_{k+1}[$ qu'elle est nulle puisque nous avons modifié les valeurs au bord ! Nous avons donc prouvé que f est nulle sur $[0,2\pi[\setminus\{x_1,\ldots,x_N\}$. La troisième condition de Dirichlet (définition 3.3) implique alors que f est nulle sur $[0,\ 2\pi[$ et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier. La forme ϕ est donc définie. □

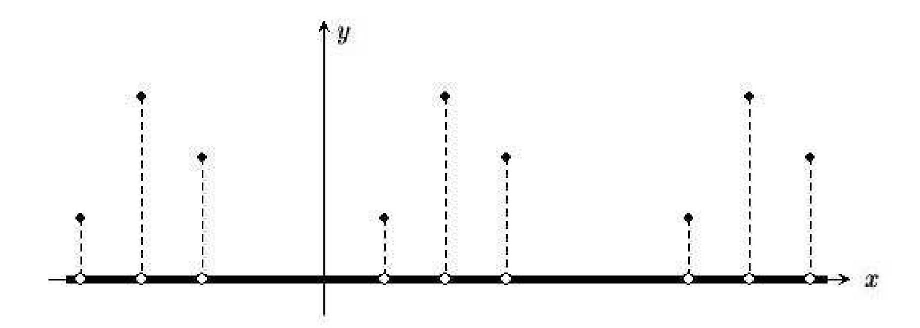


Figure 3.3. La troisième condition de Dirichlet interdit à f telle que $\phi(f, f) = 0$ d'avoir cette allure.

Remarque 3.5. L'item 3 de la définition 3.3 trouve sa première justification dans cette démonstration : il nous fait gagner un produit scalaire sur un espace fonctionnel.

A partir de maintenant l'espace $\mathcal{D}$ sera muni du produit scalaire

$$\left\langle f, g \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$$

et de la norme associée

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

appelée aussi norme de la moyenne quadratique. Nous avons tous les ingrédients pour faire de la projection orthogonale, c'est à dire pour « approximer une fonctions en moyenne quadratique ».

3.2 Coefficients de Fourier d'un élément de $\mathcal{D}$

Définition 3.6. *(Polynomes trigonométriques)*

1. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note e_k la fonction*

$$\begin{array}{rccc} e_k : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & e^{ikt} \end{array}$$

   C'est clairement une fonction de Dirichlet.

2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}_n$ le sous-espace de $\mathcal{D}$ engendré par $\{e_{-n}, \ldots, e_0, \ldots, e_n\}$. Les éléments de $\mathcal{P}_n$ sont les polynomes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n.*

On notera que e_0 est la fonction constante égale à 1 et donc $\mathcal{P}_0$ est le sous-espace des fonctions constantes.

Proposition 3.7. *La famille $(e_k\,;\, k \in \mathbb{Z})$ est orthonormée. Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(e_{-n}, \ldots, e_0, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{P}_n$. La dimension de $\mathcal{P}_n$ est $2n+1$.*

Démonstration. Soient $k,\, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $k \neq \ell$. On a $\left\langle e_k, e_k \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e_k(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = 1$ et $\left\langle e_k, e_\ell \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(k-\ell)it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(k-\ell)it}}{(k-\ell)i} \right]_0^{2\pi} = 0$, ce qui prouve la première affirmation. Le reste est évident. □

Remarque 3.8. C'est ici que nous comprenons la présence du coefficient $1/2\pi$ dans la définition de $\langle f, g \rangle$: il s'agit d'une normalisation. Sans lui, la famille des e_k ne serait qu'orthogonale. Signalons que dans certains ouvrages on normalise les e_k plutôt que le produit scalaire.

Notation 3.9. *Notons $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ des fonctions 2π-périodiques et continues (resp. indéfiniement dérivables).*

Les inclusions

$$\mathcal{C}^\infty \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$$

sont strictes. En effet, la fonction f définie par

$$x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ +1 & \text{si } x \in]0, \pi[\end{cases}$$

appartient à $\mathcal{D} \backslash \mathcal{C}$ tandis que la fonction g définie par

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, g(x) = |x|$$

appartient à $\mathcal{C} \backslash \mathcal{C}^\infty$. Par ailleurs chaque fonction e_k appartient à $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi $\mathrm{vect}\langle e_k\,; k \in \mathbb{Z}\rangle$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty$ et $(e_k\,; k \in \mathbb{Z})$ n'est même pas une base de $\mathcal{C}$.

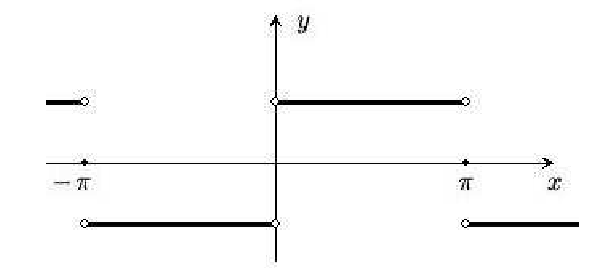


Figure 3.4. Représentation graphique de f.

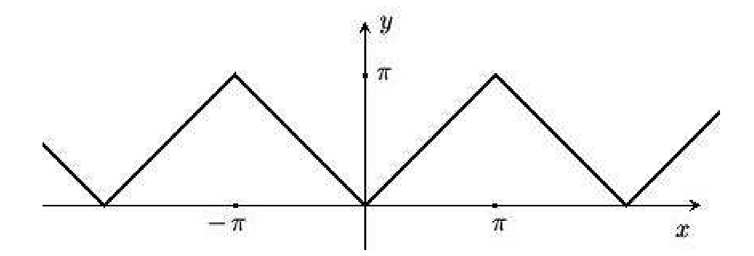


Figure 3.5. Représentation graphique de g.

Notation 3.10. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On note p_n la projection orthogonale sur $\mathcal{P}_n$*

$$p_n \ : \ \mathcal{D} \ \longrightarrow \ \mathcal{P}_n$$

Soit $f \in \mathcal{D}$. D'après le théorème de la projection orthogonale, $p_n(f)$ est *le* polynome trigonométrique qui minimise la distance entre f et $\mathcal{P}_n$. Ceci signifie que le minimum de

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - \tau(t)|^2\, dt$$

sur tous les τ appartenant à $\mathcal{P}_n$ est atteint par $p_n(f)$, et uniquement par ce dernier. On dit que $p_n(f)$ est la meilleure approximation trigonométrique de f en moyenne quadratique. Nous avons vu à la proposition 2.5 comment calculer $p_n(f)$:

$$p_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \left\langle f, e_k \right\rangle e_k = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt \right) e_k$$

Ceci nous inspire la

Définition 3.11. *Soient $f \in \mathcal{D}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On appelle $k^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de f le nombre complexe*

$$c_k(f) = \left\langle f, e_k \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$$

Si $n \geqslant k$, le nombre $c_k(f)$ n'est autre que la $k^{\text{ème}}$ composante de $p_n(f)$ dans la base $(e_{-n}, \ldots, e_0, \ldots, e_n)$. On peut généraliser cette définition :

Définition 3.12. *Soient E un espace préhilbertien, $(e_i\,;\,i\in I)$ une famille orthonormée de E et $a\in E$. Le coefficient de Fourier de a relatif à e_i est le scalaire*

$$c_i(a)=\langle a,e_i\rangle$$

La famille $(c_i(a);i\in I)$ est appelée famille des coefficients de Fourier de a dans $(e_i;i\in I)$.

Dans le cas des fonctions réelles nous aurons besoin de cette autre généralisation :

Définition 3.13. *Soient E un espace préhilbertien, $(e_i\,;\,i\in I)$ une famille orthogonale sans vecteurs nuls (pas forcément orthonormée) de E et $a\in E$. Le coefficient de Fourier de a relatif à e_i est le scalaire*

$$c_i(a)=\frac{\langle a,e_i\rangle}{\|e_i\|^2}$$

La famille $(c_i(a);i\in I)$ est appelée famille des coefficients de Fourier de a dans $(e_i;i\in I)$.

Dans le cas où I est fini et $(e_i\,;\,i\in I)$ génératrice, le lecteur reconnaît en $c_i(a)$ la composante de a dans $(e_i\,;\,i\in I)$ relative au vecteur e_i. Dans le cas où J est une partie finie de I, le lecteur reconnaît en $c_i(a)$ la composante de $p_J(a)$ dans $(e_j\,;\,j\in J)$ relative à e_i ; p_J désignant la projection orthogonale sur $\mathrm{vect}\langle e_j\,;\,j\in J\rangle$. Mais revenons à $\mathcal{D}$. Nous retiendrons les formules

$$p_n(f)=\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,e_k$$

et

$$\|p_n(f)\|^2=\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2$$

Définition 3.14. *Soit f une fonction de Dirichlet. On rappelle que pour tout $k\in\mathbb{Z}$ on note $c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,dt$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p_n(f)=\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,e_k$. La suite $(p_n(f);n\in\mathbb{N})$ est appelée série de Fourier de f.*

On notera que si f est réelle alors $c_k(f)$ et $c_{-k}(f)$ sont conjugués.

Exemple 3.15. Considérons la fonction f de Dirichlet définie par

$$x\in\,]0,2\pi[\,\longmapsto x$$

On a $c_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,dt=\pi$ et si $k\in\mathbb{Z}^*$, $c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,e^{-ikt}dt=-\frac{i}{k}$ (intégration par parties). La série de Fourier associée à f est

$$\pi-i\sum_{k=-n}^{n}\frac{e^{ikx}}{k}$$

c'est à dire

$$\pi-i\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{k}$$

3.3 Inégalité de Bessel

Théorème 3.16. *(Inégalité de Bessel) Soit $f\in\mathcal{D}$. Alors la famille $(|c_k(f)|^2\,;\,k\in\mathbb{Z})$ est sommable et sa somme vérifie l'inégalité*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2\leqslant\|f\|^2$$

Cette inégalité est énoncée dans le langage des familles sommables, mais l'ensemble des indices étant $\mathbb{Z}$, on peut la traduire en termes de séries. On rappelle que dans le cas d'une famille $(a_k\,;\,k\in\mathbb{Z})$ de nombres *positifs*, il y a équivalence entre les assertions :

i. La famille $(a_k\,;k\in\mathbb{Z})$ est sommable.

ii. Pour toute bijection $\sigma\colon\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$, la série $\sum a_{\sigma(n)}$ est convergente.

iii. Il existe une bijection $\sigma\colon \mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ telle que la série $\sum a_{\sigma(n)}$ soit convergente.

iv. La série $a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{-k})$ converge.

v. La suite $\left(\sum_{k=-n}^{n} a_k; n\in\mathbb{N}\right)$ est convergente.

vi. Les séries $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}$ sont convergentes.

De plus, les sommes obtenues dans les cinq premières assertions sont égales. Nous pouvons donc énoncer le

Théorème 3.17. *(Inégalité de Bessel) Soit $f\in\mathcal{D}$. Alors*

1. *Les séries $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty}|c_{-n}(f)|^2$ convergent et*

$$|c_0(f)|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|c_{-n}(f)|^2\leqslant\|f\|^2$$

2. *La série $\sum_{n=1}^{\infty}(|c_n(f)|^2+|c_{-n}(f)|^2)$ converge et*

$$|c_0(f)|^2+\sum_{n=1}^{\infty}(|c_n(f)|^2+|c_{-n}(f)|^2)\leqslant\|f\|^2$$

3. *La suite $(\sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2; n\in\mathbb{N})$ converge et sa limite est inférieure à $\|f\|^2$.*

Nous verrons plus loin que toutes ces inégalités sont des égalités.

Exemple 3.18. La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{|k|}}; k\in\mathbb{Z}\right)$ ne peut pas être la famille des coefficients de Fourier d'une fonction de Dirichlet car si tel était le cas, la série de terme général $\frac{1}{n}$ convergerait !

Exemple 3.19. Pour la fonction f de l'exemple 3.15, on a $|c_k(f)|^2=\frac{1}{k^2}$ pour tout $k\in\mathbb{Z}^*$. L'inégalité de Bessel confirme donc que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge !

Le corollaire qui suit sert à démontrer le théorème de convergence simple de Dirichlet (théorème 6.2).

Corollaire 3.20. *(Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f\in\mathcal{D}$. Alors*

$$\lim_{k\to+\infty}c_k(f)=\lim_{k\to-\infty}c_k(f)=0$$

Démonstration. On sait que les séries $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty}|c_{-n}(f)|^2$ convergent, donc les suites $|c_n(f)|^2$ et $|c_{-n}(f)|^2$ tendent vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$, d'où le résultat. □

3.4 Cas des fonctions réelles

Définition 3.21. *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et R un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de E. On dit que R est une structure réelle-complexe sur E si ce dernier, en tant que $\mathbb{R}$-espace, est somme directe de R et iR :*

$$E=R\oplus iR \tag{3.2}$$

Un espace vectoriel réel-complexe est un $\mathbb{C}$-espace muni d'une structure réelle-complexe.

On insiste sur le fait que la somme directe (3.2) est réelle ; en d'autres termes E y est considéré comme réel ; d'ailleurs les espaces R et iR ne sont *que* réels !

On dit que R est la partie réelle de E et que ses éléments sont les éléments réels de E. L'application

$$\begin{array}{rcl} E=R\oplus iR & \longrightarrow & E \\ a+ib & \longmapsto & a-ib \end{array}$$

est un $\mathbb{R}$-automorphisme involutif appelé « conjugaison ». Conjuguer un élément de E revient à conjuguer ses composantes exprimées dans n'importe quelle base réelle (« base réelle » signifie que la base est exclusivement constituée d'éléments réels).

Choisir une structure réelle-complexe sur E revient à choisir une $\mathbb{C}$-base de E ; R est alors défini comme le $\mathbb{R}$-sous-espace engendré par cette base. Soit $\mathcal{B}$ une base réelle de E. Les éléments de R sont caractérisés par le fait que leurs composantes dans $\mathcal{B}$ sont réelles. Pour plus de détails sur les structures réelles-complexes voir [4] et [5].

Le corps $\mathbb{C}$ est naturellement muni d'une structure réelle-complexe dont les espaces $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) héritent naturellement : pour chacun d'eux les éléments réels sont les fonctions à valeurs réelles, tout simplement ! La fonction cosinus par exemple, appartient à la partie réelle de l'espace $\mathcal{P}_1$. En effet, premièrement elle est bien à valeurs réelles et deuxièmement $\cos = \frac{1}{2}\, e_1 + \frac{1}{2}\, e_{-1}$ (autrement dit pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos t = \frac{e^{i t} + e^{-i t}}{2}$). On notera que la base que nous connaissons dans $\mathcal{P}_n$, à savoir $(e_{-n}, \ldots, e_0, \ldots, e_n)$ n'est pas réelle. Elle est donc peu pratique pour ceux qui étudient les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Notation 3.22. *Soit $k \in \mathbb{N}$. On note C_k et S_k les fonctions*

$$\begin{array}{rcl} C_k : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \cos k t \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} S_k : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \sin k t \end{array}$$

On notera que $C_0 = 1$ et $S_0 = 0$. Les fonctions C_k et S_k sont réelles, comme chacun sait, et vérifient les relations :

Proposition 3.23. *Soit $k \in \mathbb{N}$. On a*

$$\begin{cases} e_k = C_k + i S_k \\ e_{-k} = C_k - i S_k \end{cases} \tag{3.3}$$

et

$$\begin{cases} C_k = \frac{e_k + e_{-k}}{2} \\ S_k = \frac{e_k - e_{-k}}{2i} \end{cases} \tag{3.4}$$

On en déduit la

Proposition 3.24.

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(C_0, \ldots, C_n, S_1, \ldots, S_n)$ est une base orthogonale réelle de l'espace complexe $\mathcal{P}_n$.*
2. *La famille $(C_k, S_\ell\,; k \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^*)$ est orthogonale.*

L'item 1 justifie le terme « polynome trigonométrique ».

Démonstration. L'item 2 est une conséquence directe de l'item 1. Fixons n, notons $\mathcal{F} = (C_0, \ldots, C_n, S_1, \ldots, S_n)$ et montrons que $\mathcal{F}$ est une base orthogonale de $\mathcal{P}_n$. Les formules (3.4) montrent que les éléments de $\mathcal{F}$ appartiennent bien à $\mathcal{P}_n$. Si u et v sont deux éléments distincts de $\mathcal{F}$, les formules (3.4) et la sesquilinéarité montrent que $\langle u, v\rangle = 0$. Par conséquent $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale de $\mathcal{P}_n$. De plus $\operatorname{card} \mathcal{F} = \dim \mathcal{P}_n$ ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{P}_n$. □

Remarque 3.25. Il y a d'autres manières de montrer ce résultat :

- on aurait pu calculer le produit $\langle u, v\rangle$ avec la formule intégrale (c'est un bon exercice).
- on aurait pu conclure sans faire appel à la dimension, juste en invoquant (3.3) qui prouve que $\mathcal{F}$ engendre $\mathcal{P}_n$.

Remarque 3.26. Les formules (3.3) et (3.4) montraient déjà que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{P}_n$. Elles montrent en effet que la matrice de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{E} = (e_{-n}, \ldots, e_0, \ldots, e_n)$ est inversible. La formule (3.4) donne les blocs non nuls de $\operatorname{mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{F}$ et (3.3) les blocs non nuls de son inverse, $\operatorname{mat}_{\mathcal{F}} \mathcal{E}$. Bien sûr la rigueur exigerait de numéroter les éléments de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ avec les entiers de 1 à $2n + 1$ pour pouvoir parler de $\operatorname{mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{F}$ et $\operatorname{mat}_{\mathcal{F}} \mathcal{E}$.

Remarque 3.27. Si $u \neq C_0$, $\langle u, u\rangle = 1/2$; de plus $\langle C_0, C_0\rangle = 1$; ainsi

- si $k \neq 0$, $\|C_k\| = \|S_k\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
- et $\|C_0\| = 1$.

Il faudra en tenir compte dans les calculs sur cette base.

Définition 3.28. *Soient $f \in \mathcal{D}$. On appelle coefficients de Fourier réels de f, les coefficients de Fourier de f relatifs à la famille $(C_k, S_\ell\,; k \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^*)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{N}^*$ on note $a_k(f)$ le coefficient relatif à C_k et $b_\ell(f)$ le coefficient relatif à S_ℓ.*

Ainsi, d'après la défintion 3.13, si $k, \ell \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} a_0(f) = \frac{\langle f, C_0\rangle}{\|C_0\|^2} = \left\langle f, 1\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = c_0(f) \\ a_k(f) = \frac{\langle f, C_k\rangle}{\|C_k\|^2} = 2\left\langle f, C_k\right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt \\ b_\ell(f) = \frac{\langle f, S_\ell\rangle}{\|S_\ell\|^2} = 2\left\langle f, S_\ell\right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $(a_0(f), ..., a_n(f), b_1(f), ..., b_n(f))$ sont les composantes de $p_n(f)$ dans la base orthogonale $(C_0, ..., C_n, S_1, ..., S_n)$:

$$p_n(f)(t) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt\right)$$

Cette base n'étant pas normée, le calcul de la norme de $p_n(f)$ y est légèrement différent ; on trouve

$$\begin{aligned} \|p_n(f)\|^2 &= \sum_{k=0}^{n}|a_k(f)|^2\,\|C_k\|^2 + \sum_{\ell=1}^{n}|b_\ell(f)|^2\,\|S_\ell\|^2 \\ &= |a_0(f)|^2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2}{2} \end{aligned}$$

Exercice 3.1.

a) Soit E un espace préhilbertien de dimension finie, $\varepsilon = (\varepsilon_i\,;\, i \in J)$ une base orthogonale de E et $f \in E$. On note $(x_i\,; i \in J)$ les composantes de f dans ε. Montrer que $\|f\| = \sum_{i\in J}|x_i|^2\,\|\varepsilon_i\|^2$.

b) En déduire le calcul de $\|p_n(f)\|$ en fonction des coefficients de Fourier réels.

Signalons que les coefficients réels de f ne sont pas forcéments des nombres réels ! On les appelle réels dans le sens où ce sont les composantes de f dans une base réelle. En revanche si f est réelle, ces derniers sont bien réels. Voici les formules de changement de base :

Proposition 3.29. *Soit $f \in \mathcal{D}$. Pour simplifier on note $(c_k\,; k \in \mathbb{Z})$ et $(a_k, b_\ell\,; k \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^*)$ les coefficients de Fourier complexes et réels de f. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_k = c_k + c_{-k} \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) \end{cases}$$

et dans l'autre sens :

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \\ c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \end{cases}$$

Démonstration. On sait déjà que $a_0 = c_0$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a par définition $a_k = \frac{\langle f, C_k\rangle}{\|C_k\|^2} = 2\left\langle f, C_k\right\rangle = 2\left\langle f, \frac{1}{2}(e_k + e_{-k})\right\rangle = \left\langle f, e_k\right\rangle + \left\langle f, e_{-k}\right\rangle = c_k + c_{-k}$. Calcul analogue pour b_k. Maintenant, pour écrire c_k et c_{-k} en fonction de a_k et b_k il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} c_k + c_{-k} = a_k \\ ic_k - ic_{-k} = b_k \end{cases}$$

□

Remarque 3.30. On aurait pu faire un calcul matriciel en notant $\mathcal{F}=(C_k,S_k)$ et $\mathcal{E}=(e_k,e_{-k})$, k étant fixé. Les formules (3.3) et (3.4) donnent alors les matrices de passage :

$$\underset{\mathcal{F}}{\operatorname{mat}}\,\mathcal{E}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}$$

et

$$\underset{\mathcal{E}}{\operatorname{mat}}\,\mathcal{F}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}$$

qu'il suffit d'appliquer pour obtenir le premier changement :

$$\begin{pmatrix}a_k\\ b_k\end{pmatrix}=\underset{\mathcal{F}}{\operatorname{mat}}\,\mathcal{E}\begin{pmatrix}c_k\\ c_{-k}\end{pmatrix}$$

et le second :

$$\begin{pmatrix}c_k\\ c_{-k}\end{pmatrix}=\underset{\mathcal{E}}{\operatorname{mat}}\,\mathcal{F}\begin{pmatrix}a_k\\ b_k\end{pmatrix}$$

La proposition qui suit sert dans beaucoup d'exercices :

Proposition 3.31. *Soit $f\in\mathcal{D}$. Si f est paire (resp. impaire) alors les coefficients « sinus » (resp. « cosinus ») sont nuls, autrement dit $\forall \ell\in\mathbb{N}^*, b_\ell(f)=0$ (resp. $\forall k\in\mathbb{N}, a_k(f)=0$).*

Démonstration. Supposons f paire. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Grâce à la périodicité de f on peut écrire $b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$ où la fonction à intégrer est impaire, d'où le résultat. Dans le cas où f est paire le raisonnement est analogue. □

Remarque 3.32. Les applications $f\mapsto c_k(f)$, $f\mapsto a_k(f)$ et $f\mapsto b_k(f)$ sont des formes linéaires. Ceci est pratique dans les exercices.

Exemple 3.33. Reprenons la fonction f de l'exemple 3.15. Nous avons déjà calculé les coefficients $c_k(f)$. Les formules de changement de base donnent immédiatement

$$\begin{cases} a_0(f)=\pi\\ \forall k\in\mathbb{N}^*, a_k(f)=0\\ \forall k\in\mathbb{N}^*, b_k(f)=\frac{2}{k}\end{cases} \tag{3.5}$$

mais nous pouvons aussi trouver ces coefficients par le calcul direct. Premièrement nous remarquons que $f-\pi$ est impaire, donc pour tout $k\in\mathbb{N}$, $a_k(f-\pi)=0$, ce qui par linéarité donne $a_k(f)=a_k(\pi)$. Les coefficients « cosinus » de la fonction constante π étant $(\pi,0,0,0,...)$, nous retrouvons les deux premières lignes de (3.5). L'intégration par parties de $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin kt\,dt$ donne bien $\frac{2}{k}$. L'approximation trigonométrique de f est donnée par

$$p_n(f)(t)=\pi+2\left(\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin 3t+...+\frac{1}{n}\sin nt\right)$$

Exercice 3.2. Calculer

$$\inf\left\{\int_0^{2\pi}|x-(a+b\cos x+c\sin x)|^2\,dx\,;a,b,c\in\mathbb{C}\right\}$$

3.5 La suite $p_n(f)$: du fini vers l'infini

Soit $f\in\mathcal{D}$. Pour approcher f nous pouvons la projeter successivement sur $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, etc. On dispose ainsi d'un processus itérable à volonté

$$\begin{array}{rcl} f &\approx& c_0\\ f &\approx& c_0+c_{-1}e_{-1}+c_1e_1\\ f &\approx& c_0+c_{-1}e_{-1}+c_1e_1+c_{-2}e_{-2}+c_2e_2\\ \text{etc.} && \end{array}$$

D'une manière générale, dans tout travail d'approximation on cherche un processus itérable à volonté permettant de s'approcher aussi près que l'on veut de l'élément visé. Avons-nous obtenu un tel processus ici ? Autrement dit : la suite $\|p_n(f) - f\|$ tend-elle vers zéro ? Ce que nous savons c'est que la suite de sous-espaces $(\mathcal{P}_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ est strictement croissante pour l'inclusion et donc que la suite $\|p_n(f) - f\|$ décroît. Il n'est donc pas impossible que $p_n(f)$ soit un bon outil d'approximation. C'est ce que nous étudions au chapitre suivant. En attendant nous montrons ci-dessous quelques termes de $(p_n(f); n \in \mathbb{N})$ pour la fonction de Dirichlet f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \in]0, \pi[\\ \frac{1 - x^3}{10} \text{ si } x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

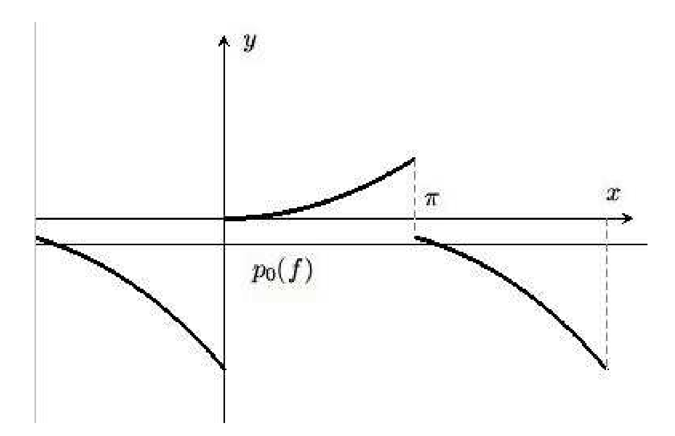


Figure 3.6.

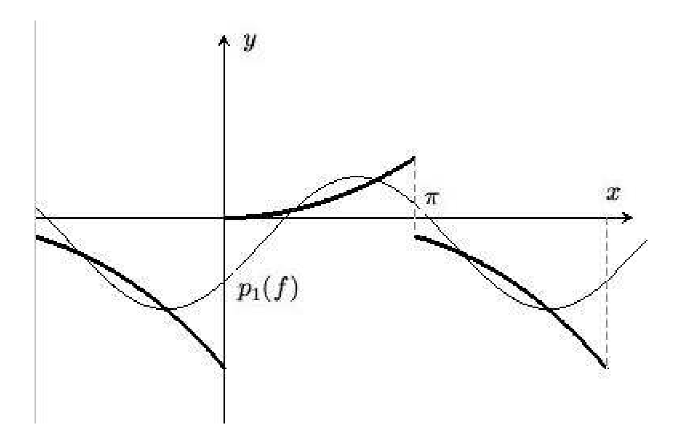


Figure 3.7.

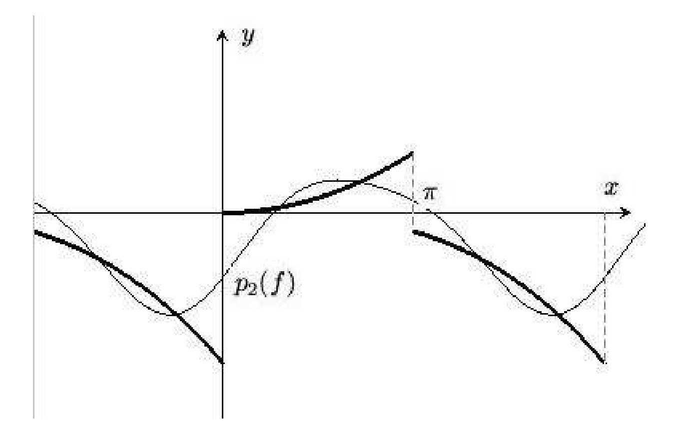


Figure 3.8.

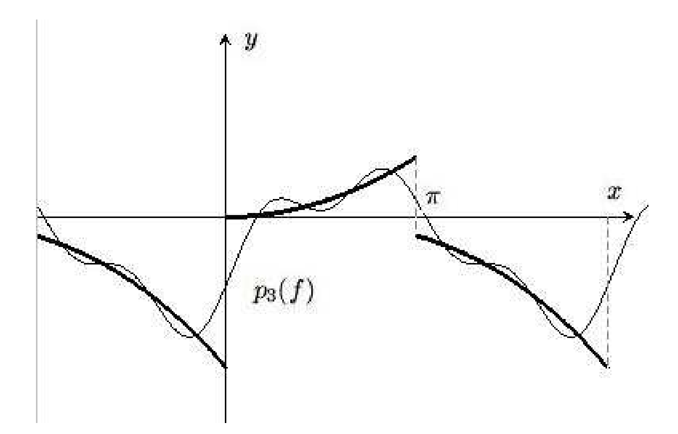


Figure 3.9.

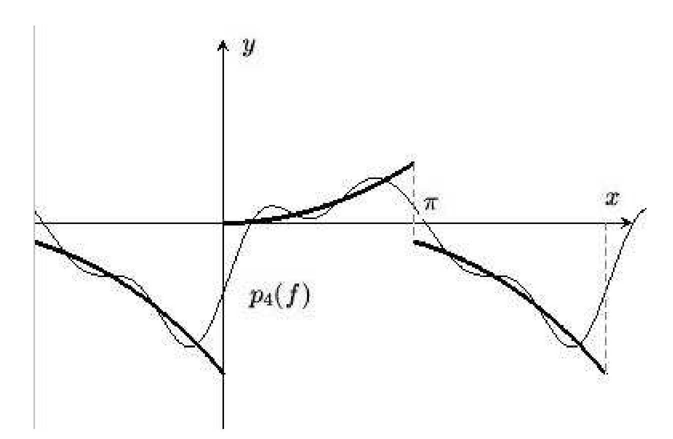


Figure 3.10.

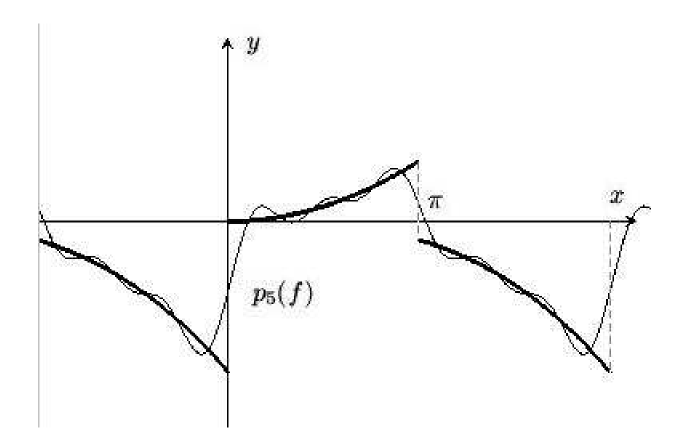


Figure 3.11. Dès le cinquième terme, la série de Fourier semble très proche de f.

Chapitre 4
Convergence en norme 2 de la série de Fourier

Le but de ce chapitre est de montrer que $\|p_n(f) - f\|_2$ tends vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (théorème de Parseval). Nous allons pour cela passer par la moyenne de Césaro $(\sigma_n(f))$ de la suite $(p_n(f))$. On rappelle que la moyenne de Césaro est définie par

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k(f)$$

L'élément $\sigma_n(f)$ appartient à $\mathcal{P}_n$, donc d'après le théorème de projection, $\|p_n(f) - f\|_2 \leqslant \|\sigma_n(f) - f\|_2$. Voici la stratégie adoptée :

1. Tout d'abord on se restreint au cas où f est continue (points 2 et 3 qui suivent).
2. On montre que $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty$ converge vers 0 (c'est le théorème de Fejér).
3. On en déduit la convergence en norme 2 de $\sigma_n(f)$ et donc de $p_n(f)$ vers f.
4. On passe au cas où f n'est pas continue en utilisant la densité de $\mathcal{C}$ dans l'espace $\mathcal{D}$.

4.1 Théorème de Fejér

C'est l'étape fondamentale de notre travail. Les étapes 3 et 4 exposées plus haut en découlent facilement. Pour contrôler la norme infinie de $\sigma_n(f) - f$, il suffit de contrôler le module de chaque $\sigma_n(f)(x) - f(x)$. Voici la stratégie adoptée :

a) On écrit $p_n(f)(x)$ comme une intégrale. Plus précisément, on exprime $p_n(f)$ comme un produit de convolution. C'est ici qu'apparaît le noyau D_n de Dirichlet (c'est une fonction). L'identité obtenue est

$$p_n(f) = f * D_n$$

c'est à dire

$$p_n(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-u) D_n(u) du$$

b) On écrit $\sigma_n(f)(x) - f(x)$ comme une intégrale. C'est ici qu'apparaît le noyau F_n de Fejér. L'identité obtenue est

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) - f(x)) F_n(u) du \tag{4.1}$$

c) On contrôle le module de l'intégrale apparue dans (4.1) en décomposant le domaine d'intégration en deux sous-domaines $[-\alpha, \alpha]$ et $\{u;\, \alpha \leqslant |u| \leqslant \pi\}$. Bien sûr il faudra choisir judicieusement α pour que cela ait un intérêt. Cette étape nécessitera une manipulation sur les noyaux de Fejér (la formule en sinus).

4.1.1 Noyaux de Dirichlet

Ces fonctions apparaissent naturellement lors de l'étape (a) évoquée plus haut. On rappelle que le produit de convolution de deux fonctions f et g est la fonction $f * g$ définie par

$$(f * g)(x) = \int f(x-u) g(u) du \tag{4.2}$$

où l'intégrale est calculée sur le domaine de définition des fonctions. Bien entendu f et g doivent vérifier certaines conditions pour que l'intégrale ci-dessus soit définie pour tout x.

Soit $f \in \mathcal{D}$. Ecrivons $p_n(f)$ sous la forme (4.2) :

$$\begin{aligned} p_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} \\ &= \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}}{2\pi} dt = \int_x^{x-2\pi} f(x-u) \frac{\sum_{k=-n}^{n} e^{iku}}{2\pi} (-du) \\ &= \int_0^{2\pi} f(x-u) \frac{\sum_{k=-n}^{n} e^{iku}}{2\pi} du \end{aligned}$$

et nous obtenons le produit de convolution de f par la fonction $\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e_k$, appelée noyau de Dirichlet d'indice n. On notera le changement de variable $x - t = u$ à la quatrième égalité, et l'utilisation de la 2π-périodicité de f à la cinquième.

Définition 4.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Le noyau de Dirichlet d'indice n est la fonction*

$$D_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e_k$$

Autrement dit pour tout réel x,

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$$

Ainsi, $D_n = \frac{1}{2\pi}(1 + e_1 + e_{-1} + \ldots + e_n + e_{-n}) = \frac{1}{2\pi}(1 + 2C_1 + \ldots + 2C_n)$, ce qui montre que les noyaux de Dirichlet sont des fonctions réelles (et paires). Notons que D_0 est la fonction constante égale à $1/2\pi$. Nous avons clairement la

Proposition 4.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $D_n \in \mathcal{C}$; les noyaux de Dirichlet sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, continues et 2π-périodiques. De plus,*

$$\int_0^{2\pi} D_n(t) dt = 1 \tag{4.3}$$

Plus haut nous avons montré la

Proposition 4.3. *Soient $f \in \mathcal{D}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $p_n(f) = f * D_n$. Autrement dit, la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions e_{-n}, ..., e_0, ..., e_n est donnée par*

$$p_n(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-u) D_n(u) du = \int_0^{2\pi} f(x-u) \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{iku} \right) du$$

Nous donnons ci-dessous les courbes représentant les premiers noyaux de Dirichlet.

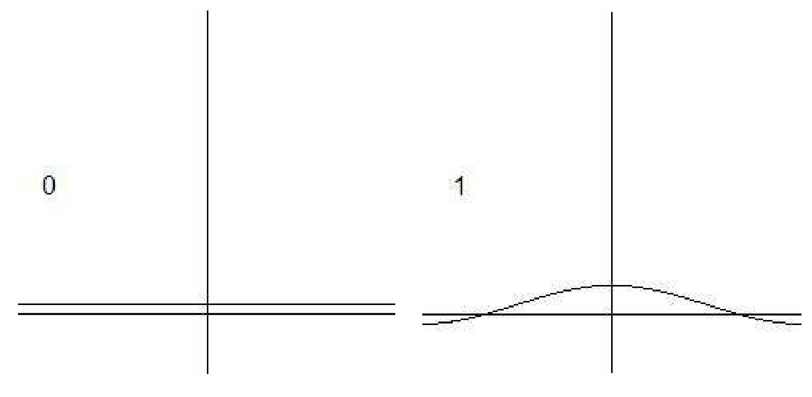


Figure 4.1. D_0 et D_1.

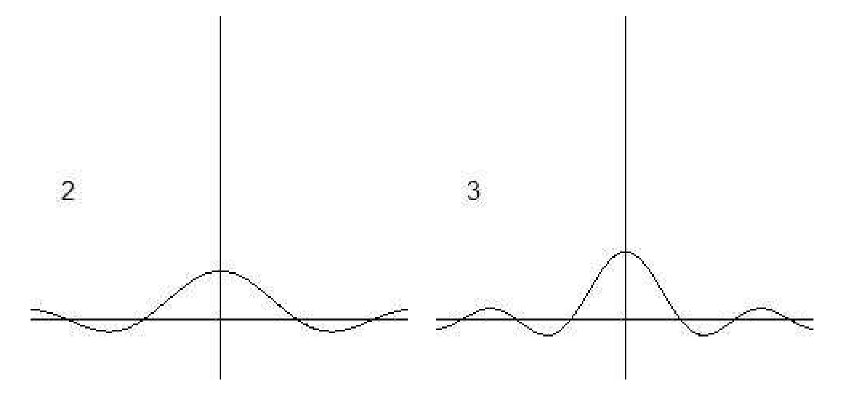


Figure 4.2. D_2 et D_3.

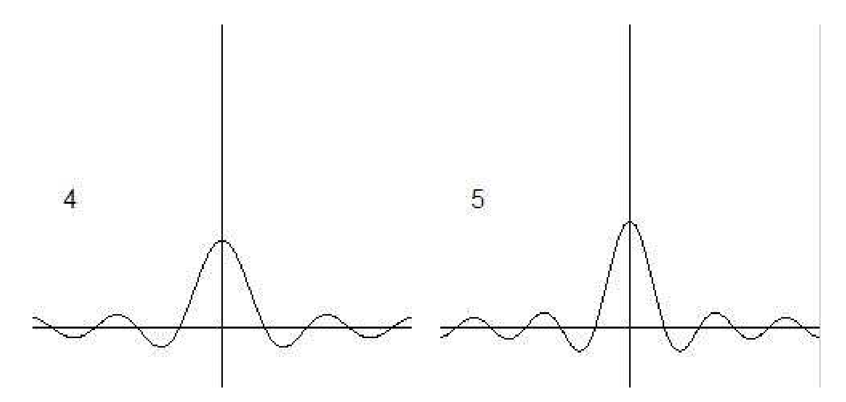


Figure 4.3. D_4 et D_5.

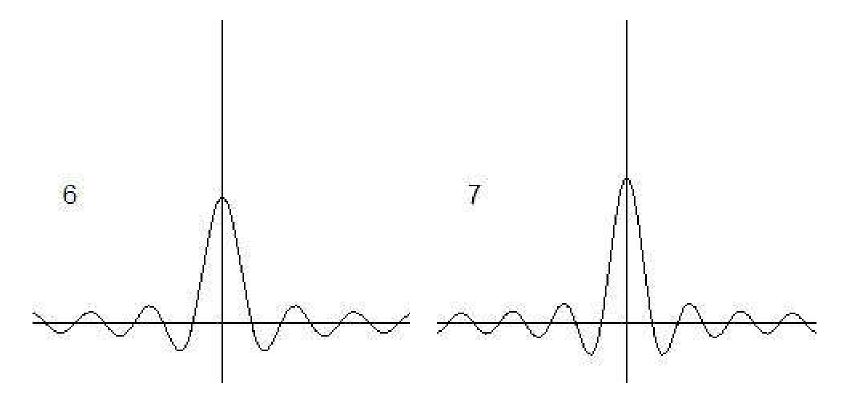


Figure 4.4. D_6 et D_7.

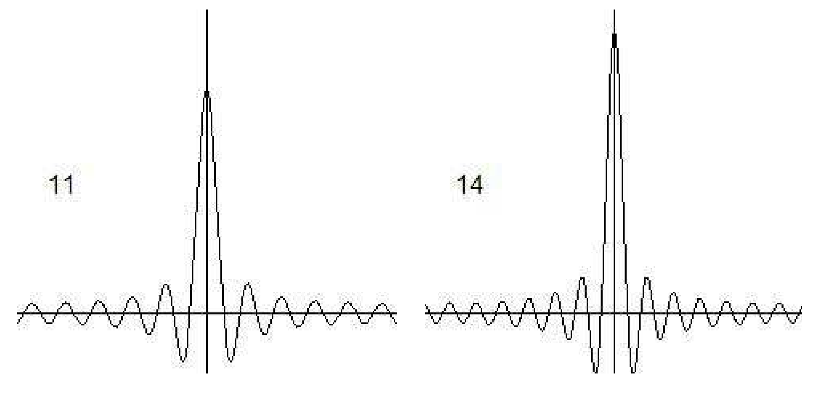


Figure 4.5. D_{11} et D_{14}.

4.1.2 Noyaux de Fejér

Ces fonctions apparaissent naturellement lors de l'étape (b) exposée plus haut. Soit $f \in \mathcal{D}$. L'étape (b) consiste à écrire $\sigma_n(f)(x) - f(x)$ comme une intégrale. Remarquons tout d'abord que soustraire une quantité q à la moyenne des nombres u_0, ..., u_{n-1} revient à calculer la moyenne des nombres $u_0 - q, ..., u_{n-1} - q$. Il s'ensuit que

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (p_k(f)(x) - f(x))$$

et notre objectif se réduit à écrire chaque $p_k(f)(x) - f(x)$, ou si l'on préfère chaque

$$\int_0^{2\pi} f(x-u) D_k(u) du - f(x)$$

comme une intégrale. C'est ici qu'intervient une manipulation classique en analyse :

$$f(x) = f(x) \times 1 = f(x) \int_0^{2\pi} D_k(u) du = \int_0^{2\pi} f(x) D_k(u) du$$

On mesure maintenant l'importance de l'égalité (4.3). Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sigma_n(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} (f(x-u) - f(x)) D_k(u) du \\ &= \int_0^{2\pi} (f(x-u) - f(x)) \frac{\sum_{k=0}^{n-1} D_k(u)}{n} du \end{aligned}$$

Nous avons atteint notre objectif en faisant apparaître une fonction remarquable : la fonction $\frac{\sum_{k=0}^{n-1} D_k}{n}$; c'est le noyau de Fejér d'indice n.

Définition 4.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le noyau de Fejér d'indice n est la fonction*

$$F_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} D_k}{n}$$

On notera que (F_n) est la moyenne de Césaro de (D_n). Nous avons clairement la

Proposition 4.5. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $F_n \in \mathcal{C}$; les noyaux de Fejér sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, continues et 2π-périodiques. De plus,*

$$\int_0^{2\pi} F_n(t) dt = 1$$

Plus haut nous avons montré la

Proposition 4.6. *Soient $f \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) - f(x)) F_n(u) du$$

Remarque 4.7. Les noyaux F_n apparaissent tout aussi naturellement si on essaye d'exprimer $\sigma_n(f)$ comme un produit de convolution. Ceux qui connaissent les propriétés de la convolution comprennent le calcul suivant

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f * D_k = f * \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} D_k \right)$$

qui montre que $\sigma_n(f)$ est le produit de convolution de f par F_n. Les autres retrouveront facilement ce résultat en partant de $\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{2\pi} f(x-u) D_k(u) du$ et en intervertissant les symboles de sommation et d'intégration...

Nous donnons ci-dessous les courbes représentant les premiers noyaux de Fejér.

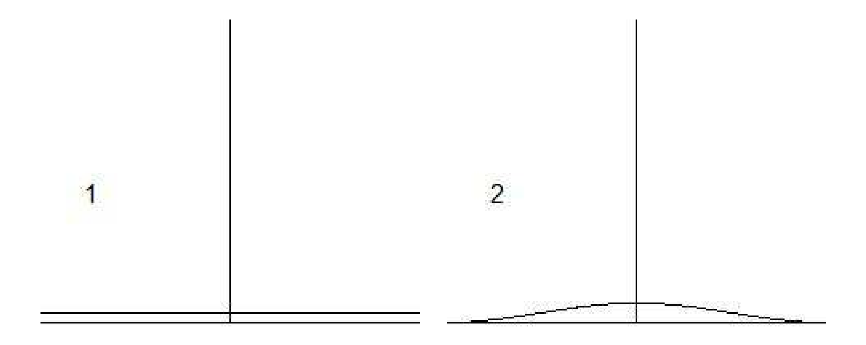


Figure 4.6. F_1 et F_2.

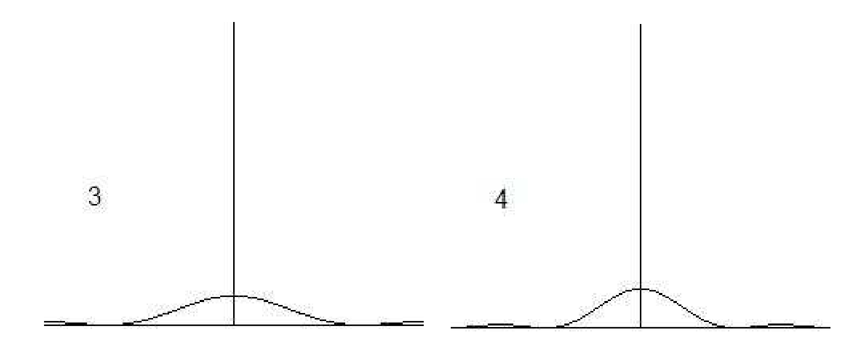


Figure 4.7. F_3 et F_4.

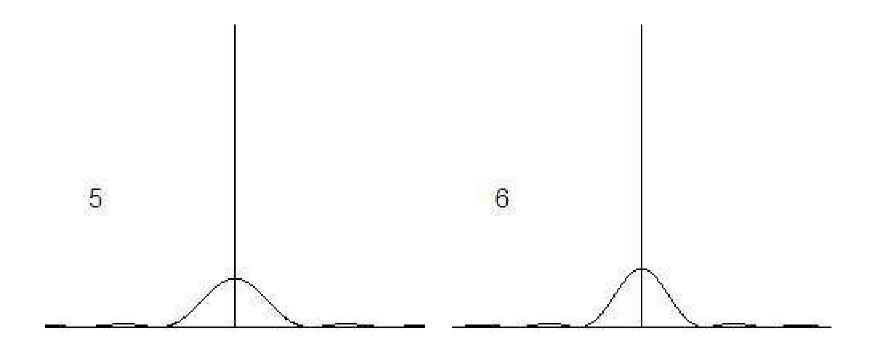


Figure 4.8. F_5 et F_6.

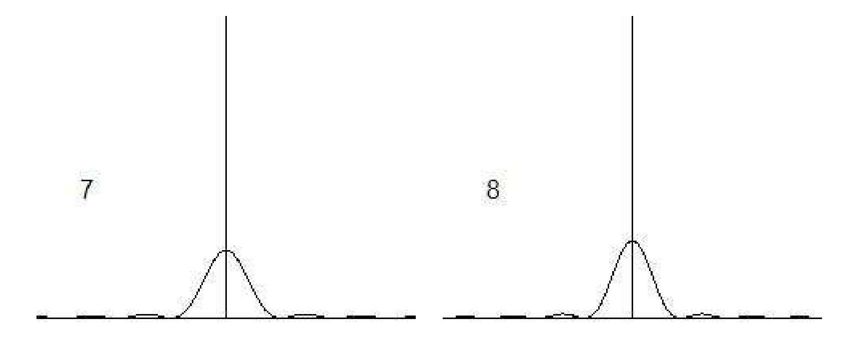


Figure 4.9. F_7 et F_8.

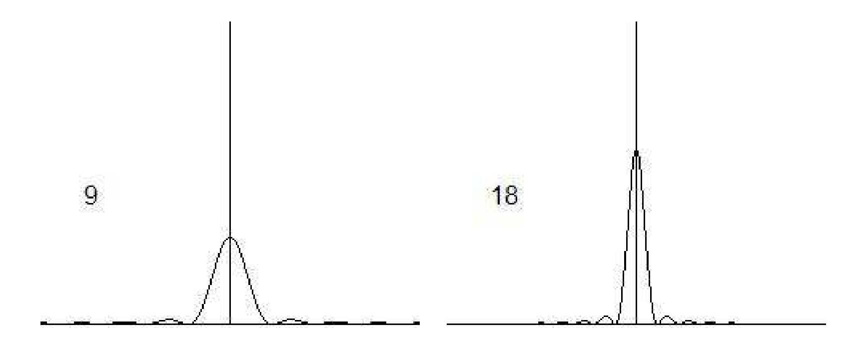


Figure 4.10. F_9 et F_{18}.

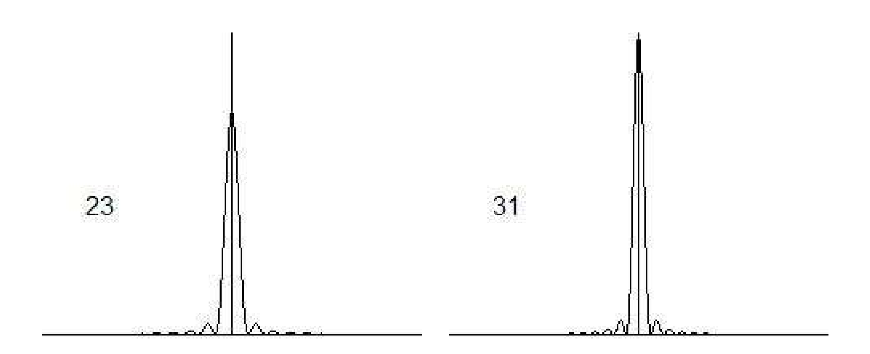


Figure 4.11. F_{23} et F_{31}. On voit, au fur et à mesure que n augmente, que l'aire comprise entre la courbe et l'axe horizontal se resserre vers l'axe vertical sans changer sa mesure et en engendrant une sorte d'aiguille de plus en plus fine et haute.

4.1.3 Enoncé du théorème et démonstration

Théorème 4.8. *(Fejér, 1900, 1904) Soit $f \in \mathcal{C}$. Alors la suite $(p_n(f))$ converge uniformément en moyenne de Césaro vers f. Autrement dit*

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Pour établir cette convergence il suffit, d'après la proposition 4.6, de contrôler le module de l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) - f(x)) F_n(u) du$. Comme annoncé, nous ferons ce travail en décomposant le domaine d'intégration en deux sous-domaines. Sur l'un des domaines les propriétés de f (continuité et périodicité) suffiront, alors que sur le deuxième il faudra compter sur les propriétés de F_n. Le lemme ci-dessous permet d'en savoir plus sur F_n.

Lemme 4.9. *(Formules en sinus des noyaux de Dirichlet et de Fejér) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $x \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\pi \sin\frac{x}{2}}$*

2. *Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $D_n(x) = \frac{2n+1}{2\pi}$*

3. *Si $n \neq 0$ et $x \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $F_n(x) = \frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{2\pi n \sin^2\frac{x}{2}}$*

4. *Si $n \neq 0$ et $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $F_n(x) = \frac{n}{2\pi}$*

On déduit de ce lemme que les noyaux de Fejér sont positifs.

Démonstration.

a) Item 1 et 2. On rappelle que $D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$. Ainsi, si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, chaque terme vaut 1 et l'item 1 est vérifié. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. On notera que $\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ est la somme des $2n+1$ permiers termes de la suite géométrique (e^{-inx}, $e^{-i(n-1)x}$, $e^{-i(n-2)x}$, ...) de raison e^{ix} (différente de 1). On en déduit que

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx} \frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}$$

En Factorisant le numérateur et le dénominateur par « l'angle moitié » (procédé classique), on obtient

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx} \times \frac{e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{2n+1}{2}x} - e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}$$

où les deux premiers facteurs donnent 1, tandis que le troisième donne $\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$, par les formules de Moivre. L'item 2 en découle.

b) Item 3 et 4. On rappelle que $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$. Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, l'item 2 donne $F_n(x) = \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{1}{2\pi n} \times n^2$, d'où l'item 4. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. D'après l'item 1,

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi n \sin\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x$$

et on se ramène aux nombres complexes en regardant $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x$ comme la partie imaginaire de $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+\frac{1}{2})x}$, somme des n premiers termes de la suite géométrique ($e^{i\frac{x}{2}}$, $e^{i\frac{3}{2}x}$,...) de raison e^{ix}. Cette somme vaut

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+\frac{1}{2})x} = e^{i\frac{x}{2}} \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{1-e^{inx}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = i\,\frac{1-e^{inx}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

ainsi

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x = \mathrm{Im}\left(i\,\frac{1-e^{inx}}{2\sin\frac{x}{2}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{inx}}{2\sin\frac{x}{2}}\right) = \frac{1-\cos nx}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

d'où le résultat. (la dernière égalité vient de $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$) □

Remarque 4.10. On peut établir ces formules sans passer par les nombres complexes. Pour les noyaux de Dirichlet on part de l'expression réelle

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \ldots + 2\cos nx\right)$$

que l'on factorise par $\frac{1}{\sin a}$ de sorte à remplacer chaque terme par un produit « $2 \times \cos \times \sin$ » :

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi\sin a}\left(\sin a + \sum_{k=1}^{n} 2\cos kx \sin a\right)$$

et pouvoir utiliser l'identité

$$2\cos b \sin a = \sin(a+b) - \sin(b-a)$$

On obtient alors

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi\sin a}\left(\sin a + \sum_{k=1}^{n} (\sin(kx+a) - \sin(kx-a))\right)$$

L'astuce réside dans le choix de a : on s'arrange pour que le terme $\sin(kx-a)$ se télescope avec le terme $\sin((k+1)x+a)$. C'est possible en prenant $a = -\frac{x}{2}$.

La méthode est analogue pour $F_n(x)$ (où $x \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$) : on fait apparaître l'identité

$$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

en factorisant par $\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$ l'expression de $F_n(x)$ obtenue grâce à l'item 1 :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n}\frac{1}{2\pi\sin\frac{x}{2}}\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n-1} 2\sin(k+\frac{1}{2})x\sin\frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi n}\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos kx - \cos(k+1)x\right) \end{aligned}$$

Le télescopage des termes conduit alors au résultat.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de Fejér :

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sigma_n(f) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Nous utiliserons l'identité

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) - f(x))F_n(u)du \tag{4.4}$$

établie au paragraphe précédent.

La fonction f étant continue et périodique, elle est uniformément continue, et il existe alors $\alpha > 0$ tel que

$$|u| \leqslant \alpha \Longrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})|f(x-u) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.5}$$

Quitte à remplacer α par $\min(\alpha, \pi)$, on peut supposer $\alpha \leqslant \pi$, et on décompose l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi}$ de (4.4) en $\int_{-\alpha}^{\alpha} + \int_{\alpha \leqslant |u| \leqslant \pi}$ (le deuxième terme désigne $\int_{-\pi}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi}$, bien entendu). D'après l'inégalité triangulaire cette intégrale vérifie

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\right| \leqslant \left|\int_{-\alpha}^{\alpha}\right| + \left|\int_{\alpha \leqslant |u| \leqslant \pi}\right|$$

1. Majoration du premier terme de droite. En tenant compte de (4.5) et du fait que F_n est positive (voir lemme précèdent) on obtient

$$\begin{aligned} \left|\int_{-\alpha}^{\alpha}\right| &\leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x-u) - f(x)|F_n(u)du \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} F_n(u)du \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(u)du \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{4.6}$$

2. Majoration du deuxième terme. Commençons par une majoration grossière. Pour tout x et u réels on a

$$|f(x-u) - f(x)| \leqslant |f(x-u)| + |f(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty$$

On en déduit que

$$\left|\int_{\alpha \leqslant |u| \leqslant \pi}\right| \leqslant 2\|f\|_\infty \int_{\alpha \leqslant |u| \leqslant \pi} F_n(u)du$$

C'est ici qu'intervient la formule en sinus de F_n : pour tout $u \in \{\alpha \leqslant |u| \leqslant \pi\}$ on a

$$F_n(u) = \frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}} \leqslant \frac{1}{2\pi n}\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

(voir figure ci-dessous), ainsi

$$\left| \int_{\alpha \leqslant |u| \leqslant \pi} \right| \leqslant 2 \| f \|_\infty \frac{1}{2\pi n \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \int_{\alpha \leqslant |u| \leqslant \pi} du \leqslant \frac{2\| f \|_\infty}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \frac{1}{n} \tag{4.7}$$

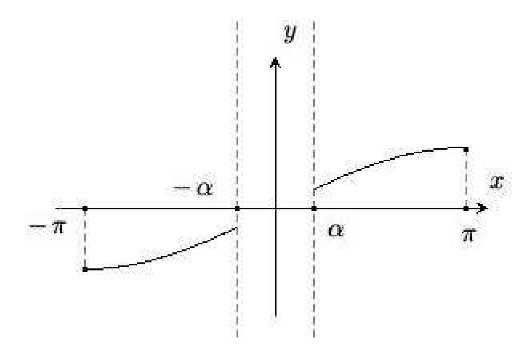


Figure 4.12. A gauche de $-\alpha$ on a $\sin \frac{u}{2} \leqslant \sin(-\frac{\alpha}{2}) \leqslant 0$, et à droite de α, $\sin \frac{u}{2} \geqslant \sin \frac{\alpha}{2} \geqslant 0$. Ainsi, dans tous les cas considérés ici, $\sin^2 \frac{u}{2} \geqslant \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

3. Soit n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\frac{2\| f \|_\infty}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \frac{1}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. D'après les inégalités (4.6) et (4.7), $\forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sigma_n(f) - f(x)| \leqslant \varepsilon$, d'où le théorème.

□

Exercice 4.1. Montrer que toute fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

4.2 Théorème de Parseval

Le lemme ci-dessous ne pose aucune difficulté :

Lemme 4.11. *Soit $f \in \mathcal{D}$. Alors $\| f \|_2 \leqslant \| f \|_\infty$, autrement dit*

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt} \leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$$

Soit f une fonction de Dirichlet *continue*. D'après le théorème de Fejér, $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty$ tend vers zéro et donc, d'après le lemme précèdent, $\|\sigma_n(f) - f\|_2$ tend lui aussi vers zéro. Or d'après le théorème de projection, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|p_n(f) - f\|_2 \leqslant \|\sigma_n(f) - f\|_2$. Par conséquent si f est continue nous pouvons affirmer que la série de Fourier $p_n(f)$ converge vers f en moyenne quadratique. Pour étendre ce résultat à toutes les fonctions de Dirichlet, il suffit de remarquer que toute fonction appartenant à $\mathcal{D}$ est arbitrairement proche d'une fonction continue (proche au sens de la norme quadratique). C'est l'objet du

Lemme 4.12. *Le sous-espace $\mathcal{C}$ des fonctions de Dirichlet continues est dense dans l'espace préhilbertien $\mathcal{D}$ des fonctions de Dirichlet.*

On insiste sur le fait qu'il s'agit de densité relative à la topologie définie par la norme 2.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}$. Nous allons exhiber une suite (f_n) de $\mathcal{C}$ qui converge vers f pour la norme 2. Nous supposerons dans un premier temps que f ne possède qu'une seule discontinuité sur $[0, 2\pi[$ sur laquelle $|f|$ saute positivement. On note x_0 le point de $[0, 2\pi[$ où f saute. Nous supposons sans perte de généralité que $x_0 \neq 0$. Soit n un entier naturel assez grand pour que $[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]$ soit contenu dans la période $[0, 2\pi[$. On définit une fonction 2π-périodique f_n en disant que sur $[0, 2\pi[\backslash [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]$, f_n coïncide avec f, tandis que sur $[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]$, f_n coïncide avec la fonction affine qui vaut $f(x_0 - \frac{1}{n})$ en $x_0 - \frac{1}{n}$ et $f(x_0 + \frac{1}{n})$ en $x_0 + \frac{1}{n}$; voir figure. Cette fonction est bien continue.

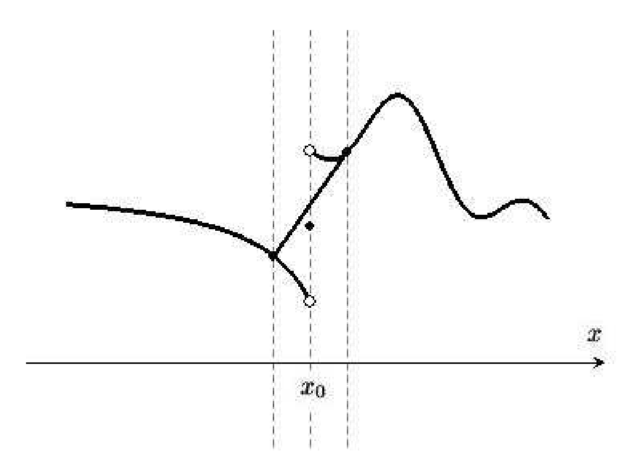


Figure 4.13. En dehors de $]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[$, f_n épouse f, tandis qu'entre $x_0 - \frac{1}{n}$ et $x_0 + \frac{1}{n}$, f_n est affine.

Affirmation. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leqslant \|f\|_\infty$.

Démonstration. Si $x \in [0, 2\pi[\backslash[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]$, c'est évident. Si $x \in [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]$, la croissance de $|f_n|$ implique $|f_n(x)| \leqslant |f_n(x_0 + \frac{1}{n})|$, or $|f_n(x_0 + \frac{1}{n})| = |f(x_0 + \frac{1}{n})|$ et $|f(x_0 + \frac{1}{n})| \leqslant \|f\|_\infty$, d'où le résultat. ♢

On en déduit que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x)| + |f(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty$ et donc

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(t) - f(t)|^2\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} |f_n(t) - f(t)|^2\, dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} 4\|f\|_\infty^2\, dt = \frac{4}{\pi}\|f\|_\infty^2 \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

La suite (f_n) (définie à partir d'un certain rang) est dans $\mathcal{C}$ et converge bien vers f pour la norme 2. Le cas où le saut de $|f|$ en x_0 est négatif se traite de manière analogue. On achève la démonstration en traitant le cas où f possède plusieurs sauts par période. Cela ne pose aucune difficulté. □

Nous sommes prêts pour le théorème de Parseval :

Théorème 4.13. *(Parseval, 1799) La série de Fourier d'une fonction de Dirichlet converge en moyenne quadratique vers cette fonction. Autrement dit, si $f \in \mathcal{D}$, alors $\|p_n(f) - f\|_2$ tends vers zéro. On en déduit l'égalité*

$$\sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2} = \|f\|_2$$

appelée égalité de Parseval.

Démonstration.

1. Au début de ce paragraphe nous avons établi ce résultat dans le cas où f est continue (en utilisant le théorème de Fejér). Il s'agit donc de traiter le cas où $f \in \mathcal{D}\backslash\mathcal{C}$ (cas où la convergence de Fejér n'est plus vraie). Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme de densité, il existe $g \in \mathcal{C}$ telle que $\|g - f\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Cette fonction étant continue, on sait qu'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\|p_n(g) - g\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Par ailleurs $\|p_n(f) - f\| = \|p_n(f) - p_n(g) + p_n(g) - g + g - f\|_2 \leqslant \|p_n(f) - p_n(g)\|_2 + \|p_n(g) - g\|_2 + \|g - f\|_2$. Or $\|p_n(f) - p_n(g)\|_2 = \|p_n(f - g)\|_2 \leqslant \|f - g\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ (première inégalité de Bessel selon laquelle la projection diminue la norme 2). On en déduit que pour tout $n \geqslant n_0$, $\|p_n(f) - f\|_2 \leqslant \varepsilon$.

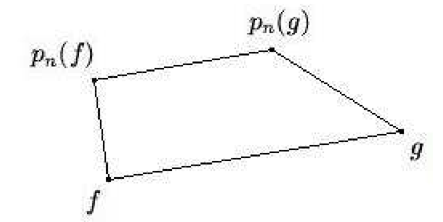


Figure 4.14.

2. Egalité de Parseval. La convergence en norme 2 de $p_n(f)$ vers f montre que le système $(e_n\,;\,n\in\mathbb{Z})$ est total dans $\mathcal{D}$. L'égalité de Parseval est alors une conséquence directe du théorème 2.12. □

Nous développons plus loin l'aspect géométrique de ce résultat (théorème 4.21).

Remarque 4.14. Il y a d'autres manières d'écrire l'égalité de Parseval :

$$|c_0(f)|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|c_n(f)|^2+|c_{-n}(f)|^2\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt$$

$$|a_0(f)|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{dt}$$

$$2|a_0(f)|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{dt}$$

4.3 Conséquences

La première chose que nous constatons est que l'égalité de Parseval fait le lien entre la somme d'une série et l'intégrale d'une fonction. Regardons ce que cette égalité devient dans des cas particuliers.

Exemple 4.15. Reprenons la fonction f de l'exemple 3.15 : $\forall x\in]0,2\pi[,\ f(x)=x$.

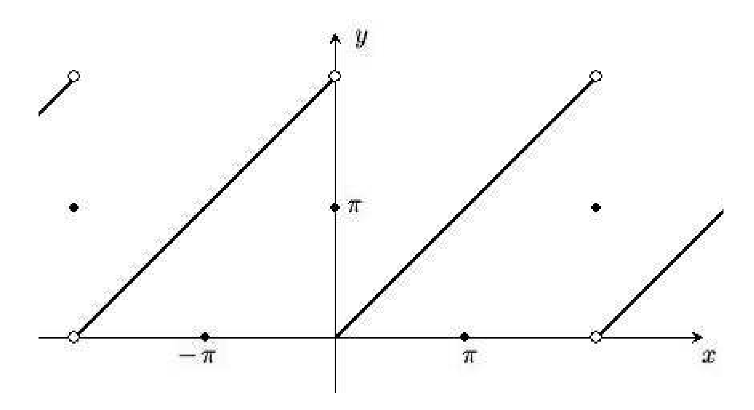


Figure 4.15.

La série de Fourier associée est

$$\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

et l'égalité de Parseval s'écrit

$$\frac{4}{3}\pi^2 = \pi^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

c'est à dire

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exemple 4.16. On définit $f\in\mathcal{D}$ par $\forall x\in]-\pi,\pi[,\ f(x)=x$.

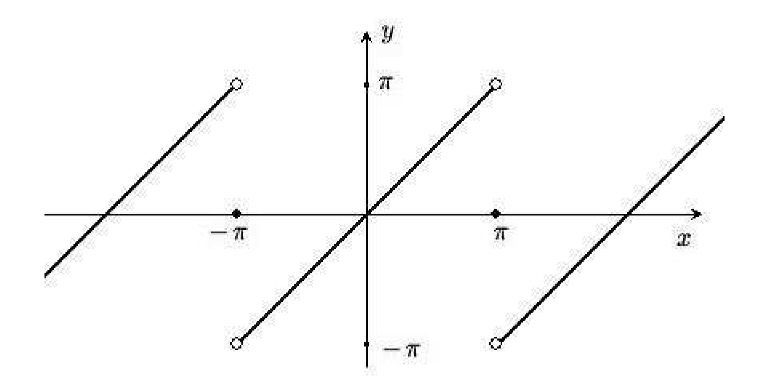


Figure 4.16.

La série de Fourier associée est

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$$

et l'égalité de Parseval s'écrit $\frac{\pi^2}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ce qui aboutit à l'identité obtenue précèdemment.

Exemple 4.17. On définit $f\in\mathcal{D}$ par $\forall x\in]-\pi,0[,\ f(x)=-1$ et $\forall x\in]0,\pi[,\ f(x)=1$.

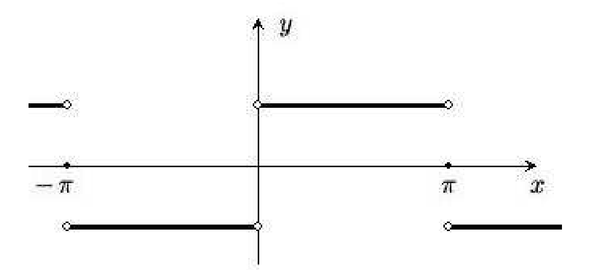


Figure 4.17.

La série de Fourier associée est

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

et l'égalité de Parseval s'écrit

$$1=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

c'est à dire

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Exemple 4.18. On définit $f\in\mathcal{D}$ par $\forall x\in]-\pi,\pi[,\ f(x)=|x|$.

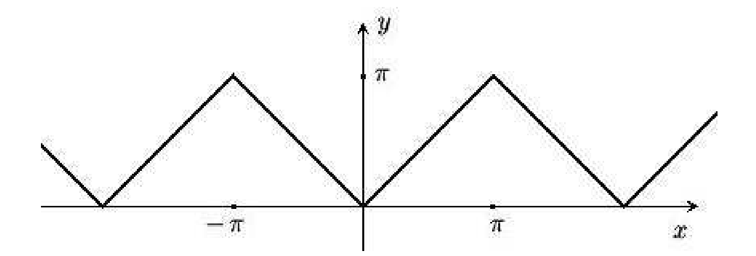


Figure 4.18.

La série de Fourier associée est

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

et l'égalité de Parseval s'écrit

$$\frac{\pi^2}{3}=\frac{\pi^2}{4}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$$

c'est à dire

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

Exercice 4.2. Déduire de cette identité la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

Exemple 4.19. On définit $f\in\mathcal{D}$ par $\forall x\in]-\pi,\pi[,\ f(x)=x^2$.

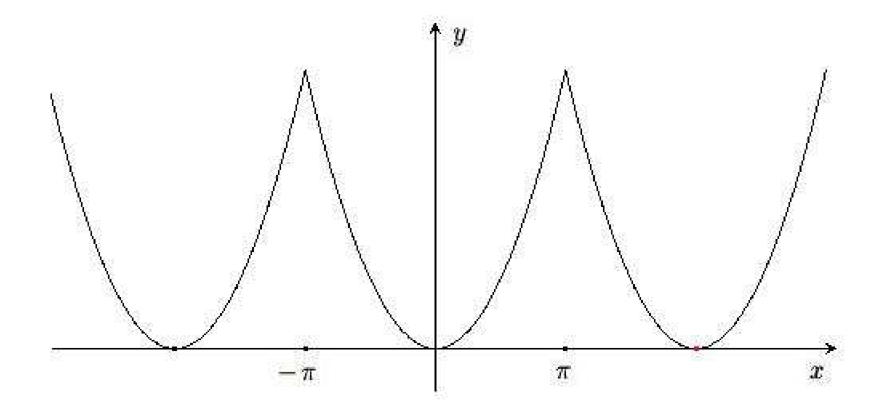


Figure 4.19.

La série de Fourier associée est

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

et l'égalité de Parseval s'écrit

$$\frac{\pi^4}{5}=\frac{\pi^4}{9}+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

c'est à dire

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

Remarque 4.20. Euler (1707-1783) connaissait déjà les sommes du type

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$$

pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, mais sa manière de les calculer était radicalement différente et pour le moins magique. Nous savons que la somme S des racines d'un polynome d'indéterminée x et de degré n est donnée par la formule de Viète

$$S = -\frac{\text{coeff}\,(n-1)}{\text{coeff}\,(n)}$$

où coeff(k) désigne le coefficient de x^k. Cette formule n'est pas pratique si l'on souhaite « allonger » le polynome en lui ajoutant des termes (S dépend du degré n). Heureusement Euler remarque que si a est la racine non nulle d'un polynome, alors $1/a$ est la racine du polynome « mirroir ». Par exemple si a annule $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$, alors $1/a$ annule $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. On en déduit que la somme Σ_1 des inverses des racines d'un polynome est donnée par la formule

$$\Sigma_1 = -\frac{\text{coeff}(1)}{\text{coeff}(0)} \tag{4.8}$$

à condition que le premier coefficient du polynome ne soit pas nul ! Attention : on somme en tenant compte de la multiplicité de chaque racine. Euler généralise alors ce résultat aux « polynomes infinis » sans toutefois donner un cadre rigoureux à ce type d'objet : il énonce que la somme infinie des inverses des racines du polynome infini $A + Bx + Cx^2 + Dx^4 + \ldots$. est égale à $-\frac{B}{A}$.

Pour appliquer son « théorème », il cherche tout naturellement à développer la fonction $\sin(x)$ en une série entière. Son procédé est injustifié mais efficace. Premièrement il écrit

$$\sin x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + \ldots$$

en vertu de l'imparité. Ensuite il dérive cette relation « terme à terme » :

$$\cos x = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + \ldots$$

ce qui donne en $x = 0$ l'identité $A = 1$. En dérivant terme à terme l'égalité précédente il trouve

$$-\sin x = 6Bx + 20Cx^3 + \ldots$$

d'où $6B = -1$ et $B = -1/6$. En procédant ainsi de suite il trouve

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Malheureusement ici le premier coefficient est nul ! Qu'à cela ne tienne, il considère l'identité

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

Il en déduit que le polynome infini du membre de droite a pour racines les nombres $\{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$ et, chacune de ces racines étant simple (comme on le voit en dérivant) il trouve

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n\pi} = 0$$

ce qui est faux pour la sommabilité telle qu'on la définit usuellement. On peut toutefois interpréter ce résultat en remarquant qu'effectivement chaque terme $\frac{1}{n\pi}$ s'annule avec son opposé $-\frac{1}{n\pi}$. Pas très satisfait par cette première découverte il décide de poser $x^2 = t$, ce qui donne

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^n$$

Le membre de droite est un polynome en t de premier coefficient 1 et deuxième $-\frac{1}{6}$. Les zéros de $\frac{\sin x}{x}$ sont les nombres $n\pi$ pour n entier non nul. Il en déduit que les racines du polynome en t sont les nombres $n^2\pi^2$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Il obtient donc l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{6}$$

d'où il déduit la série des inverses des carrés...

Pour obtenir d'autres séries il cherchera d'autre formule du type (4.8). Il en trouvera pour la sommes des inverses des carrés des racines, la somme des inverses des racines exposants quatre, etc. On montre facilement que la somme Σ_2 des inverses des carrés des racines est égale à

$$\Sigma_2 = \frac{\text{coeff}(1) - 2\,\text{coeff}(0)\,\text{coeff}(2)}{\text{coeff}(0)^2}$$

Sachant que pour le polynome en t plus haut, le coefficient de t^2 est $1/120$, Euler trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Il trouve également les sommes

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} &= \frac{\pi^6}{945} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8} &= \frac{\pi^8}{9450} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{10}} &= \frac{\pi^{10}}{93555} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{12}} &= \frac{691\pi^{12}}{638512875} \end{aligned}$$

Pour plus de renseignements sur ce thème, lire [9].

La deuxième conséquence du théorème de Parseval est la totalité du système $(e_n\ ;\ n \in \mathbb{Z})$. L'application du théorème 2.12 (théorème géométrique) donne ici le

Théorème 4.21. *(Propriétés géométriques de $\mathcal{D}$)*

i. Le système $(e_n\,;n\in\mathbb{Z})$ est une base hilbertienne de $\mathcal{D}$.

ii. Pour $f,g\in\mathcal{D}$, la famille $(c_n(f)\,\overline{c_n(g)}\,;n\in\mathbb{Z})$ est sommable et $\langle f,g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\overline{c_n(g)}$

iii. Pour tout $f\in\mathcal{D}$, $(c_n(f);n\in\mathbb{Z})$ est sommable et $\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$.

iv. Pour tout $f \in \mathcal{D}$, $(c_n(f)e_n\ ;\ n \in \mathbb{Z})$ est sommable pour la norme 2 et $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ pour la norme 2.

Grâce au théorème de Parseval on peut montrer que deux fonctions distinctes ont forcément des coefficients de Fourier distincts ; ceci est l'objet de la

Proposition 4.22. *(Corollaire du théorème de Parseval) L'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}\ :\ \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \\ f & \longmapsto & (c_k(f);k\in\mathbb{Z}) \end{array}$$

est linéaire et injective.

Démonstration. La linéarité est conséquence de la linéarité de chaque application $f \mapsto c_k(f)$. Pour établir l'injectivité il suffit de calculer le noyau. Supposons que $\mathcal{S}(f) = 0$. Ceci signifie que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $c_k(f)=0$. La formule de Parseval donne alors $\|f\|_2 = 0$, d'où $f=0$. □

On termine cette section par une dernière conséquence au théorème de Parseval : la non complétude de l'espace préhilbertien $\mathcal{C}$. Pour s'en convaincre il suffit de se donner une fonction $f \in \mathcal{D}\backslash\mathcal{C}$. La suite $(p_n(f)\,;n \in \mathbb{N})$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}$ mais ne converge pas dans $\mathcal{C}$ (sa limite pour la norme 2 est f). Evidemment nous n'avions pas besoin d'un théorème aussi puissant pour établir ce résultat.

4.4 Questions soulevées par le théorème de Parseval

Commençons par un petit rappel d'algèbre linéaire. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension infinie et $(e_i\,;i\in I)$ une base. Si $u\in E$, on note $(u_i\,;i\in I)$ les composantes de E dans la base $(e_i\,; i\in I)$. On a alors un monomorphisme d'espace vectoriels

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}\ :\ E & \longrightarrow & \mathbb{C}^I \\ u & \longmapsto & (u_i\,;i\in I) \end{array}$$

appelé « application coordonnées relative à la base $(e_i\,;i\in I)$ ». Notons que ce morphisme n'est pas surjectif : une famille appartenant à $\mathbb{C}^I$ ne peut correspondre à un vecteur de E que si elle est presque-nulle.

Le monomorphisme $\mathcal{M}$ n'est pas sans rappeler le monomorphisme $\mathcal{S}$ qui, d'une certaine manière, associe à chaque fonction f la famille de ses « coordonnées » dans la base hilbertienne trigonométrique, mais la comparaison est abusive car

- premièrement $(e_k\,;k\in\mathbb{Z})$ n'est pas une base (cette famille n'est pas génératrice),
- deuxièmement, la famille des « coordonnées » de f n'est pas forcément presque-nulle.

Le deuxième point implique que la somme $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e_k$ n'a auncune signification algébrique, il est impossible donc de reconstituer f à partir de ses soi-disants « coordonnées ». Deux problèmes s'offrent ainsi à nous :

- Comment reconstituer une fonction de Dirichlet à partir de ses coefficients de Fourier ? (il s'agira d'étudier différents modes de convergence de séries.)
- Comment savoir si une famille $(c_k\,;k\in\mathbb{Z})$ de nombres complexes correspond, via $\mathcal{S}$, à une fonction de Dirichlet ? (voir exemple 3.18.)

Se donner la famille $(c_k\,;k\in\mathbb{Z})$ équivaut à se donner la série de fonctions

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\,e_n+c_{-n}\,e_{-n}) \tag{4.9}$$

On peut donc voir l'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ comme l'ensemble des séries de fonctions de variable t de la forme (4.9) ou, ce qui revient au même, de la forme

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

On les appelle « séries trigonométriques ». C'est bien entendu la définition de $p_n(f)$ qui nous les a inspirées. Finalement on peut voir le monomorphisme $\mathcal{S}$ comme une application qui à chaque fonction de Dirichlet associe une série de fonctions. Ce point de vue éclairera les questions précèdentes. Il vient alors une autre question :

- Les coefficients de Fourier de la somme d'une série $c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\,e^{int}+c_{-n}\,e^{-int})$ convergente coïncident-ils avec les coefficients c_n avec lesquels on a construit cette série ? (pour répondre il faudrait commencer par préciser le type de convergence dont il est question !)

Ces questions font l'objet du chapitre ?.

4.5 Une alternative au théorème de Fejér : le théorème de Stone de Weierstrass

On peut établir la convergence de $p_n(f)$ vers f en moyenne quadratique sans utiliser le théorème de Fejér. Il suffit d'utiliser un théorème tout aussi puissant : le théorème de Stone Weierstrass. Nous n'en donnerons ici que la version trigonométrique.

Proposition 4.23. *(Version trigonométrique du théorème de Stone Weierstrass) Le sous-espace des polynomes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ pour la norme infinie. Autrement dit, pour tous $f\in\mathcal{C}$ et $\varepsilon>0$, il existe $\rho\in$ vect$\langle e_n\,;n\in\mathbb{Z}\rangle$ tel que $\|f-\rho\|_\infty\leqslant\varepsilon$.*

Compte tenu du lemme 4.11, ce théorème implique que la famille $(e_n\,;n\in\mathbb{Z})$ est totale dans $\mathcal{C}$, ou si l'on préfère, que les polynomes trigonométriques forment une base hilbertienne de $\mathcal{C}$. On en déduit aussitôt la convergence de $p_n(f)$ vers f en norme 2. Ensuite pour passer de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{D}$ on utilise le lemme de densité...

4.6 Compléments sur le théorème de Fejér

Le théorème de Fejér contient un autre résultat que nous avons occulté pour ne pas embrouiller notre « chemin vers le théorème de Parseval ». Il s'agit d'un résultat de convergence ponctuelle, au sens de Césaro.

Théorème 4.24. *(théorème de Fejér, partie 2) Soient $f\in\mathcal{D}$ et $x\in\mathbb{R}$. Alors $\sigma_n(f)(x)\longrightarrow f(x)$.*

Autrement dit : si f est une fonction 2π-périodique continue par morceaux, alors la série de Fourier de f en x converge vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ en moyenne de Césaro. La valeur de cette limite apporte une justification supplémentaire à l'item 3 de la définition 3.3. Ce théorème demeure vrai si f est une fonction 2π-périodoque, Riemann-intégrable sur $[0,2\pi]$ et possédant une limite à gauche et à droite en x.

Démonstration. Fixons $\varepsilon>0$. On a

$$\sigma_n(f)(x)-f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-u)-f(x))F_n(u)\,du=\int_{-\pi}^{0}+\int_0^{\pi}$$

(on a coupé le domaine d'intégration en deux). En effectuant le changement de variable $u=-v$ sur la première intégrale et en tenant compte de la parité de F_n, on obtient

$$\begin{aligned}\sigma_n(f)(x)-f(x) &= \int_{-\pi}^{0}(f(x+v)-f(x))F_n(-v)(-dv)+\int_0^{\pi}(f(x-u)-f(x))F_n(u)\,du\\ &= \int_0^{\pi}(f(x+u)+f(x-u)-2f(x))F_n(u)\,du\end{aligned}$$

Soit $\alpha>0$ tel que pour tout $u\in\,]-\alpha,\alpha[$ on ait $|f(x+u)+f(x-u)-2f(x)|\leqslant\varepsilon$. L'existence d'un tel α est claire dans le cas où f est continue en x. Pour s'en convaincre dans le cas où x est un point de discontinuité, il suffit de remarquer que $2f(x)=f(x^+)+f(x^-)$.

1. Première majoration. On a

$$\left|\int_0^{\alpha}(f(x+u)+f(x-u)-2f(x))F_n(u)\,du\right|\leqslant\varepsilon\int_0^{\pi}F_n(u)\,du=\frac{\varepsilon}{2}$$

2. Deuxième majoration. On tient compte de

$$F_n(u)=\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{2\pi n\sin^2\frac{u}{2}}$$

(vraie sur tout l'intervalle d'intégration) et du fait que $u\mapsto\frac{1}{\sin^2\frac{u}{2}}$ décroît de $\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ à 1 sur $[\alpha,\pi]$ pour obtenir

$$\left|\int_{\alpha}^{\pi}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi n\sin^2\frac{\alpha}{2}}\int_{\alpha}^{\pi}(f(x+u)+f(x-u)-2f(x))\,du$$

qui pour n assez grand est clairement inférieur à $\varepsilon/2$.

3. On conclue en recollant les morceaux ! □

Nous donnons maintenant une version plus générale du théorème 4.8 (Théorème de Fejér) dont la preuve n'est qu'une petite adaptation de ce qui a été fait à la section 4.1.3.

Théorème 4.25. *(Fejér, 1904) Soit $f \in \mathcal{D}$.*

1. *Si $x \in \mathbb{R}$, alors $\sigma_n(f)(x) \to f(x)$.*
2. *Si f est continue sur l'intervalle compact $[a,b]$, alors $\sigma_n(f)$ converge uniformément vers f sur l'intervalle $[a,b]$.*

Le théorème de Fejér ne nous dit rien sur la convergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction mais il nous renseigne sur la valeur d'une telle limite si jamais elle existe :

Proposition 4.26. *Soient $f \in \mathcal{D}$ et $x \in \mathbb{R}$. Si $p_n(f)(x)$ converge alors sa limite ne peut être que $f(x)$.*

Démonstration. D'après le théorème de convergence ponctuelle de Fejér (item 1 du théorème précèdent), la suite $\sigma_n(f)(x)$ converge vers $f(x)$. Or cette suite numérique est la moyenne de Césaro de la suite $p_n(f)(x)$ supposée convergente, elles ont donc la même limite. □

La convergence ponctuelle de $p_n(f)$ est étudiée aux chapitres ? et ?.

Chapitre 5
Convergence normale de la série de Fourier

5.1 Convergence normale des séries trigonométriques

Etudier la convergence de la suite $p_n(f)$ équivaut à étudier la nature d'une série de terme général

$$c_n\,e_n + c_{-n}\,e_{-n}$$

On rappelle qu'une famille $(z_j\ ;\ j \in I)$ de nombre complexes est sommable si et seulement si la famille des modules, $(|z_j|\, j \in I)$ est sommable. Autrement dit dans $\mathbb{C}$, il y a équivalence entre sommabilité et absolue-sommabilité. Soit $(c_k\ ;\ k \in \mathbb{Z})$ une famille de nombres complexes indéxée dans $\mathbb{Z}$. Nous avons les équivalences :

i. La famille $(c_k\,; k \in \mathbb{Z})$ est sommable.
ii. Pour toute bijection $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, la série $\sum\ |c_{\sigma(n)}|$ converge.
iii. Il existe une bijection $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ telle que la série $\sum\ |c_{\sigma(n)}|$ converge.
iv. La série $\sum_{n=1}^{\infty}\ |c_n + c_{-n}|$ converge.
v. La série $\sum_{n=1}^{\infty}\ (|c_n| + |c_{-n}|)$ converge.
vi. La suite $\left(\ \sum_{k=-n}^{n}\ |c_k|; n \in \mathbb{N}\right)$ converge.
vii. Les séries $\sum_{n=1}^{\infty}\ |c_n|$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\ |c_{-n}|$ convergent.

Proposition 5.1. *Soit $(c_n\,; n \in \mathbb{Z})$ une famille de nombres complexes. Si la famille $(c_n\,; n \in \mathbb{Z})$ est sommable, alors la série $c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\ (c_n\,e_n + c_{-n}\,e_{-n})$ converge normalement (donc uniformément) vers une fonction continue f. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n$ (la série de Fourier de f est la série initiale).*

Démonstration.

1. Il suffit de majorer la norme du terme général : $\|c_n\ e_n\ +\ c_{-n}\ e_{-n}\|_\infty \leqslant |c_n|\,\|e_n\|_\infty + |c_{-n}|\,\|e_{-n}\|_\infty = |c_n| + |c_{-n}|$. Or d'après le rappel sur les familles sommables, la série de terme général $|c_n| + |c_{-n}|$ est convergente. On en déduit la convergence normale de la série de terme général $c_n\,e_n + c_{-n}\,e_{-n}$ et on note
$$f = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\ (c_n\,e_n + c_{-n}\,e_{-n})$$
la somme de cette série.
2. D'après ce qui précède, f est dans $\mathcal{C}$, comme limite uniforme d'une suite de fonctions de $\mathcal{C}$. De plus, si $k \in \mathbb{Z}$ on a
$$\begin{aligned} c_k(f) &= \left\langle f, e_k \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\ (c_n\,e_n + c_{-n}\,e_{-n})\right] e_{-k} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(c_0 \int_0^{2\pi}\ e_{-k} + \sum_{n=1}^{+\infty}\ \int_0^{2\pi}\ (c_n\,e_n + c_{-n}\,e_{-n})\,e_{-k}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(c_0 \int_0^{2\pi}\ e_{-k} + \sum_{n=1}^{+\infty}\ \left[c_n\ \int_0^{2\pi}\ e_{n-k} + c_{-n}\ \int_0^{2\pi}\ e_{-n-k}\right]\right) \end{aligned}$$

(la troisième égalité est justifiée par la convergence uniforme). Or pour tout $j \in \mathbb{Z}^*$, l'intégrale $\int_0^{2\pi} e_j$ vaut zéro, tandis que l'intégrale $\int_0^{2\pi} e_0$ vaut 2π. On en déduit que dans la dernière somme seul le terme $c_k \times 2\pi$ subsiste, d'où l'égalité $c_k(f) = c_k$. □

Corollaire 5.2. *Soit $f \in \mathcal{D}$. Si la famille des coefficients de Fourier de f est sommable, alors $p_n(f)$, la série de Fourier de f, converge normalement vers f (et f appartient forcément à $\mathcal{C}$)*

Démonstration. D'après la proposition précèdente $p_n(f)$ converge normalement vers une fonction continue g et les coefficients de g sont les coefficients de Fourier de f. Puisque f et g ont les mêmes coefficients de Fourier, f et g coïncident (n'oublions pas que $\mathcal{S}$ est injective). □

On remarquera qu'il était possible d'utiliser la proposition 4.26 au lieu de la proposition 4.22 pour conclure cette démonstration.

Nous avons partiellement répondu aux questions de la section 4.4. Notons $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ dont la famille des coefficients de Fourier est sommable (c'est en fait un sous-espace de $\mathcal{C}$). Notons $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ des familles sommables. La restriction

$$\mathcal{S}_{|\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$$

est un isomorphisme d'espace vectoriels. L'application réciproque est celle qui à chaque famille (c_n) associe la fonction somme de la série normalement convergente $c_0 + \sum (c_n e_n + c_{-n} e_{-n})$.

Cette restriction de $\mathcal{S}$ ressemble beaucoup à une « application coordonnées » classique.

Nous noterons que $f \in \mathcal{A}$ si et seulement si la série de Fourier de f converge normalement. Le sens $\Rightarrow$ est établi au corollaire 5.2. La réciproque vient du fait que si la série converge normalement, alors la famille $(c_n(f) e_n \,;\, n \in \mathbb{Z})$ est sommable pour la norme infinie et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la famille $(c_n(f) e_n(x); n \in \mathbb{Z})$ est sommable. Si $x = 0$, cette famille est $(c_n(f); n \in \mathbb{Z})$.

Les sections qui suivent fournissent des conditions suffisantes pour qu'une fonction appartienne à $\mathcal{A}$.

5.2 Cas des fonctions de Dirichlet de classe C^2

On s'inspire de la notation 3.9 pour définir les espaces $\mathcal{C}^p$ (pour $p \in \mathbb{N}$) en disant que les éléments de $\mathcal{C}^p$ sont les fonctions de Dirichlet de classe C^p. Si $f \in \mathcal{C}^1$, $f' \in \mathcal{C}$ et une idée féconde réside dans l'expression des coefficients de f' en fonction de ceux de f.

Proposition 5.3. *Soit $f \in \mathcal{C}^1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = in c_n(f)$.*

Démonstration. $c_n(f') = \left\langle f', \, e_n \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} \, dt = \frac{1}{2\pi} \left(\left[f(t) e^{-int} \right]_0^{2\pi} + in \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt \right) = in c_n(f)$. L'intégration par parties est justifiée par le fait que f et e_{-n} sont de classe C^1. □

Ce calcul nous donne un dominant de $c_n(f)$ pour n tendant vers $\pm\infty$ qui est d'autant plus négligeable que la classe de f est élevée. Pour f de classe C^2, par exemple on trouve $c_n(f) = o(\frac{1}{n^2})$, ce qui montre que la famille $c_n(f)$ est sommable et donc que la série de Fourier de f converge normalement vers f.

Proposition 5.4. *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^k$. Alors*

$$c_n(f) \underset{\pm\infty}{=} o(\frac{1}{n^k})$$

Ainsi, plus f est régulière, plus $c_n(f)$ converge vite vers zéro en $\pm\infty$.

Démonstration. Commençons par le cas $k=1$. Soit $f\in\mathcal{C}^1$. On a $f'\in\mathcal{C}$ et d'après le lemme de Riemann-Lebesgue,

$$c_n(f')\underset{n\to\pm\infty}{\longrightarrow}0$$

autrement dit

$$inc_n(f)\underset{\pm\infty}{=}o(1)$$

d'où le résultat. Supposons maintenant le résultat vrai jusqu'à l'ordre k. Soit $f\in\mathcal{C}^{k+1}$. Alors $f'\in\mathcal{C}^k$ et d'après l'hypothèse de récurrence, $c_n(f')\underset{\pm\infty}{=}o(\frac{1}{n^k})$, autrement dit $inc_n(f)\underset{\pm\infty}{=}o(\frac{1}{n^k})$, d'où le résultat. □

Corollaire 5.5. *La série de Fourier d'une fonction de Dirichlet de classe C^2 converge normalement vers cette fonction. Autrement dit, si $f\in\mathcal{C}^2$, alors $p_n(f)$ converge normalement vers f.*

Démonstration. De $c_n(f)\underset{\pm\infty}{=}o(\frac{1}{n^2})$ on déduit que la famille $(c_n(f);n\in\mathbb{Z})$ est sommable, et on applique le corollaire 5.2. □

5.3 Première amélioration : les fonctions de Dirichlet de classe C^1

On peut, grâce à l'inégalité de Bessel et l'inégalité classique

$$xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2} \tag{5.1}$$

afaiblir les hypothèses du corollaire 5.5.

Corollaire 5.6. *La série de Fourier d'une fonction de Dirichlet de classe C^1 converge normalement vers cette fonction. Autrement dit, si $f\in\mathcal{C}^1$, alors $p_n(f)$ converge normalement vers f.*

Démonstration. Soit $f\in\mathcal{C}^1$. Alors $f'\in\mathcal{D}$ et la famille $(|c_n(f')|^2\,;n\in\mathbb{Z})$ est sommable (voir inégalité de Bessel ou égalité de Parseval). Mais, compte tenu de l'égalité $c_n(f')=inc_n(f)$, cela revient à dire que $(n^2|c_n(f)|^2;n\in\mathbb{Z})$ est sommable. Or d'après (5.1)

$$|c_n(f)|=n\,|c_n(f)|\,\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(n^2\,|c_n(f)|^2+\frac{1}{n^2}\right)$$

La sommablité des $n^2|c_n(f)|^2$ et des $\frac{1}{n^2}$ implique celle des $c_n(f)$, d'où le résultat. □

5.4 Deuxième amélioration : les fonctions de Dirichlet de classe C^1 par morceaux

L'idée ici est d'étendre la formule $c_n(f')=inc_n(f)$ aux fonctions de Dirichlet dont la dérivée possède les mêmes propriétés de régularité qu'une fonction de Dirichlet. Grâce à cette nouvelle formule on établira sans difficulté la convergence normale de la série de Fourier vers sa somme.

Définition 5.7. *Soit $f\in\mathcal{D}$ une fonction de Dirichlet. On dit que f est de classe C^1 par morceaux s'il existe des réels x_1, x_2, ..., x_N dans $]0,2\pi[$ tels que pour tout $k\in\{0,\ldots,N\}$ la fonction $f_{|]x_k,x_{k+1}[}$ se prolonge en une fonction C^1 sur $[x_k,x_{k+1}]$ (on a posé $x_0=0$ et $x_{N+1}=2\pi$). On note $\mathcal{C}^1_{\mathrm{mor}}$ l'ensemble des fonctions de Dirichlet de classe C^1 par morceaux.*

On montre facilement que $\mathcal{C}^1_{\mathrm{mor}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$. Les éléments de $\mathcal{C}^1_{\mathrm{mor}}$ sont caractérisés par les trois propriétés ci-dessous :

— f est dérivable partout sauf éventuellement en un nombre fini de points par période,

— Les points de $[0,2\pi[$ où f' est non définie ou non continue sont en nombre fini,

— f' possède une limite à gauche et à droite en tout point.

Ainsi la dérivée d'une fonction C^1 par morceaux est à quelques trous près une fonction continue par morceaux (en fait f' coïncide avec une fonction de Dirichlet presque partout). Ainsi, quitte à poser $f'(x) = \frac{f'(x^+) + f'(x^-)}{2}$ en chaque x où f' n'est pas définie, on peut voir f' comme un élément de $\mathcal{D}$. Dans ce qui suit nous noterons abusivement f' la fonction obtenue par ce procédé de régularisation.

Théorème 5.8. *(Dirichlet, 1829) Soit $f \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^1_{\text{mor}}$.*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = i n c_n(f)$*
2. *La série $p_n(f)$ converge normalement vers f.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^1_{\text{mor}}$. Soient x_1 ,..., x_N les points de $]0, 2\pi[$ où f' est non définie ou non continue. Ce sont les x_k de la définition 5.7 et tout comme dans cette définition, nous posons $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 2\pi$, de sorte que f est de classe C^1 sur chaque intervalle *fermé* $[x_k, x_{k+1}]$ (n'oublions pas que f est continue, inutile donc de restreindre à $]x_k, x_{k+1}[$ pour ensuite prolonger à $[x_k, x_{k+1}]$ par continuité). Pour calculer les $c_n(f')$ nous allons décomposer le domaine d'intégration selon la subdivision donnée par les x_k :

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f' e_{-n}$$

et en intégrant par partie chaque terme on obtient

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[f e_{-n} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} + \frac{i n}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f e_{-n}$$

Dans la première somme tous les termes se télescopent (notons que nous pouvons faire ce même calcul avec f non continue, sauf qu'alors le télescopage n'a pas lieu). La deuxième somme donne $i n c_n(f)$ grâce à la relation de Chasles.

On établit la convergence normale de $p_n(f)$ vers f en reprenant mot pour mot la démonstration du cas « $\mathcal{C}^1$ » (corollaire 5.6). □

Remarque 5.9. Le théorème de Dirichlet affirme tout simplement que les fonctions continues et C^1 par morceaux appartiennent à $\mathcal{A}$.

Chapitre 6

Convergence simple de la série de Fourier

Commençons par étendre la notion de dérivée à droite et à gauche.

Définition 6.1. *Soient f une fonction de Dirichlet et $x \in \mathbb{R}$. On dit que f possède une dérivée à droite en x généralisée si*

$$\frac{f(x+h) - f(x^+)}{h}$$

possède une limite pour h tendant vers zéro par valeurs positives. On note $f_d'(x)$ cette limite lorsqu'elle existe.

Si x est un point de continuité de f, on retrouve la notion classique de dérivée à droite. C'est lorsque x est un point de discontinuité que cette définition devient intéressante. On définit de manière analogue la dérivée généralisée à gauche de f en x, que l'on note $f_g'(x)$ lorsqu'elle existe.

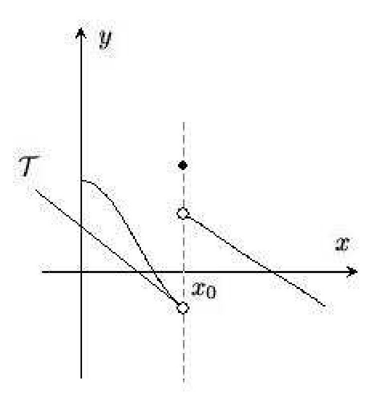


Figure 6.1. La dérivée à gauche généralisée en x_0 est la pente de la demi-tangente $\mathcal{T}$.

Exercice 6.1. Montrer que si f est de classe C^1 par morceaux alors f possède une dérivée généralisée à gauche et à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

Théorème 6.2. *(Dirichlet, 1829) Soient f une fonction de Dirichlet et $x \in \mathbb{R}$. Si la fonction f possède des dérivées génaralisées à gauche et à droite en x, alors la série de Fourier de f évaluée en x converge vers $f(x)$:*

$$p_n(f)(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

Avec les mêmes hypothèses sur f, sauf la régularité au sens de Dirichlet, on aurait

$$p_n(f)(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

Ceci apporte une nouvelle justification à l'item de la définition 3.3 !

Démonstration. Il s'agit de contrôler $p_n(f)(x) - f(x)$. Nous savons écrire $p_n(f)(x)$ comme une intégrale, plus précisément comme le produit de convolution de f par le noyau D_n. Nous essaierons dans un premier temps d'y faire apparaître une sorte de taux de variation de f afin d'exploiter l'existence des dérivées généralisées à droite et à gauche en x. On a

$$p_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\, D_n(u)\, du = \int_{-\pi}^{0} f(x-u)\, D_n(u)\, du + \int_{0}^{\pi} f(x-u)\, D_n(u)\, du$$

En effectuant le changement de variable $u = -v$ dans la première intégrale, et en tenant compte de la parité de D_n, on obtient

$$\begin{aligned} p_n(f)(x) &= \int_{-\pi}^{0} f(x+v)\, D_n(-v)(-dv) + \int_{0}^{\pi} f(x-u)\, D_n(u)\, du \\ &= \int_{0}^{\pi} (f(x-u) - f(x+u))\, D_n(u)\, du \end{aligned}$$

La deuxième idée consiste à forcer l'entrée de $f(x)$ dans cette intégrale en se servant de l'identités $\int_0^{\pi} D_n(u)\, du = \frac{1}{2}$ et de l'astuce (déjà utilisée) :

$$f(x) = (f(x^-) + f(x^+)) \times \frac{1}{2} = (f(x^-) + f(x^+)) \times \int_0^{\pi} D_n(u)\, du = \int_0^{\pi} (f(x^-) + f(x^+))\, D_n(u)\, du$$

on obtient :

$$\begin{aligned} p_n(f)(x) - f(x) &= \int_0^{\pi} (f(x-u) - f(x+u) - f(x^-) - f(x^+))\, D_n(u)\, du \\ &= \int_0^{\pi} \frac{f(x-u) - f(x+u) - f(x^-) - f(x^+)}{2\pi \sin \frac{u}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u\, du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h_x(u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u\, du \end{aligned}$$

où

$$h_x(u) = \frac{f(x-u) - f(x+u) - f(x^-) - f(x^+)}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

La dernière intégrale ressemble vaguement au calcul du coefficient de Fourier d'une fonction. Cette ressemblance se précise, si l'on tient compte de l'égalité

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u = \sin\left(nu + \frac{u}{2}\right) = \sin \frac{u}{2} \cos nu + \cos \frac{u}{2} \sin nu$$

Le fait par ailleurs que $f_g'(x)$ et $f_d'(x)$ existent prouve que h_x possède des limites en 0^+ et 0^-. Ainsi h_x se prolonge en une fonction de $\mathcal{D}$, que nous noterons encore h_x. Cette fonction étant impaire, la fonction $h_x(\bullet) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\bullet$ est paire, et l'intégrale étudiée s'écrit alors

$$\begin{aligned} p_n(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_x(u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u\, du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_x(u) \sin \frac{u}{2} \cos nu\, du + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_x(u) \cos \frac{u}{2} \sin nu\, du \end{aligned}$$

Chacun de ces deux termes est (au coefficient multiplicatif 2 près) un coefficient de Fourier réel d'une fonction de $\mathcal{D}$. On en déduit, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, que leur limite pour n tendant vers $+\infty$ est nulle, d'où le résultat. □

Nous venons en fait de démontrer un résultat plus général que celui énoncé :

Théorème 6.3. *Soient $f \in \mathcal{D}$ et $x \in \mathbb{R}$. Si la fonction*

$$u \longmapsto \frac{f(x+u) + f(x-u) - f(x^+) - f(x^-)}{u}$$

est bornée au voisinage de zéro, alors $p_n(f)(x) \longrightarrow f(x)$.

C'est sous cette forme qu'est énoncé le théorème de convergence ponctuelle de Dirichlet dans certains manuels.

Le théorème de Dirichlet permet, à l'instar du théorème de Parseval, de calculer la somme de certaines séries. Reprenons les exemples étudiés à la section 4.3.

Exemple 6.4. On définit $f \in \mathcal{D}$ par $\forall x \in]-\pi,\pi[,\ f(x)=x$. La série de Fourier associée est

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$$

Le théorème de Dirichlet en $x=0$ donne « $0=0$ ». Pour $x \in]0,\pi[$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}=\frac{x}{2}$$

En $x=\frac{\pi}{2}$ on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$$

Exemple 6.5. On définit $f \in \mathcal{D}$ par $\forall x \in]-\pi,0[,\ f(x)=-1$ et $\forall x \in]0,\pi[,\ f(x)=1$. La série de Fourier associée est

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

Le théorème de Dirichlet en $x \in]0,\pi[$ donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

En $x=\frac{\pi}{2}$ on obtient l'identité de l'exemple précèdent.

Exemple 6.6. On définit $f \in \mathcal{D}$ par $\forall x \in]-\pi,\pi[,\ f(x)=|x|$. La série de Fourier associée est

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

Le théorème de Dirichlet en $x=0$ donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

(d'où l'on déduit la somme des $1/n^2$ en décomposant celle-ci selon les termes « pairs » et « impairs »)

Exemple 6.7. On définit $f \in \mathcal{D}$ par $\forall x \in]-\pi,\pi[,\ f(x)=x^2$. La série de Fourier associée est

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

Le théorème de Dirichlet en $x=\pi$ donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Chapitre 7
Période autre que 2π

On peut re-écrire toute la théorie de Fourier avec des fonctions périodiques de période T quelconque. Il suffit pour cela de remplacer $\mathcal{D}$ par l'espace $\mathcal{D}(T)$ des fonctions T-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ continues par morceaux et régulières au sens de Dirichlet, et de munir cet espace vectoriel complexe du produit scalaire donné par

$$\left\langle f, g \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

Lorsque la variable t parcourt $[0,\, T]$, la variable $x = \frac{2\pi t}{T}$ parcourt $[0,\, 2\pi]$. Ainsi, si f est 2π-périodique, la fonction $t \mapsto f(\frac{2\pi}{T}\,t)$ est T-périodique. Ceci nous pousse tout naturellement à considérer la famille $(\varepsilon_n\,; n \in \mathbb{Z})$ des fonctions

$$\varepsilon_n : t \longmapsto e^{i\,\frac{2\pi}{T}\,t}$$

Cette famille vit bien dans $\mathcal{D}(T)$ et possède les mêmes propriétés que la famille des fonctions trigonométriques dont elle est inspirée (orthonormalité, totalité, etc.) On adapte sans difficulté toutes les définitions et tous les théorèmes qui précèdent. Dans ce contexte les coefficients sont définis par les formules

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t}\,dt \\ a_k(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t}\,dt \\ b_\ell(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t}\,dt \end{aligned}$$

($n \in \mathbb{Z}$, k, $\ell \in \mathbb{N}^*$) où on a introduit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ pour simplifier. La série de Fourier associée à f s'écrit par exemple

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f) \cos n\omega t + b_n(f) \sin n\omega t \right)$$

On laisse le soin au lecteur de retrouver les autres formules et théorèmes.

Chapitre 8
Phénomène de Gibbs (1848)

Si on regarde comment converge $p_n(f)$ vers f au voisinage d'un point de discontinuité, on voit apparaître une oscillation qui se resserre de plus en plus. C'est le phénomène de Gibbs, découvert et étudié par Wilbraham, Michelson et Gibbs. Nous nous proposons ici de l'observer sur un exemple classique. Soit f la fonction de Dirichlet définie par

$$x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ +1 & \text{si } x \in]0, \pi[\end{cases}$$

Cette fonction étant impaire, tous les coefficients $a_n(f)$ sont nuls. Le calcul montre en fait que tous les $b_n(f)$ d'indice pair sont nuls aussi et

$$b_{2k+1}(f) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2k+1}$$

L'étude de $p_n(f)$ se ramène donc à l'étude de la suite

$$s_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

Pour connaître les variations des fonctions s_n sur $[0, \pi]$ nous calculons s_n' :

$$\begin{aligned} s_n'(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k+1)x \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)x} + \sum_{k=0}^{n-1} e^{-i(2k+1)x} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(e^{ix} \frac{1 - e^{i2nx}}{1 - e^{i2x}} + e^{-ix} \frac{1 - e^{-i2nx}}{1 - e^{-i2x}} \right) \end{aligned}$$

On traite le premier dénominateur avec l'arc moitié : $\frac{1}{1 - e^{i2x}} = \frac{1}{e^{ix}} \frac{1}{e^{-ix} - e^{ix}} = -\frac{1}{e^{ix}} \frac{1}{2i\sin x}$. De même, $\frac{1}{1 - e^{-i2x}} = \frac{1}{e^{-ix}} \frac{1}{2i\sin x}$, d'où

$$\begin{aligned} s_n'(x) &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1 - e^{i2nx}}{2i\sin x} + \frac{1 - e^{-i2nx}}{2i\sin x} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{2i\sin x} \left(e^{i2nx} - e^{-i2nx} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\sin 2nx}{\sin x} \end{aligned}$$

Les éléments de $]0, \pi[$ annulant $\sin 2nx$ sont les $k\frac{\pi}{2n}$ avec $k \in \{1, \ldots, 2n-1\}$, les variations de s_n sont

x	0		$\frac{\pi}{2n}$		$2\frac{\pi}{2n}$		$3\frac{\pi}{2n}$		$\ldots$		$(2n-1)\frac{\pi}{2n}$		π
$s_n(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$\ldots$	$\nearrow$		$\searrow$	

et on devine les oscillations évoquées. Voici les courbes représentant s_8 et s_{25} :

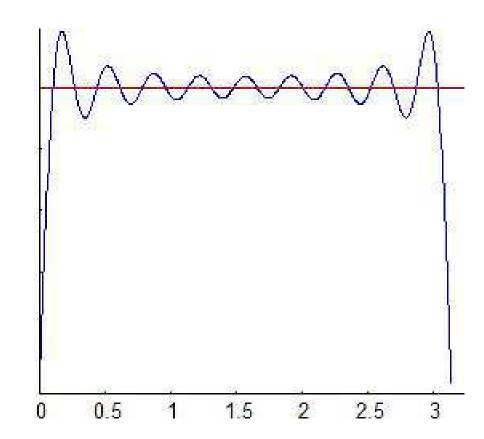


Figure 8.1. Tracé de $\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin 17x}{17}\right)$.

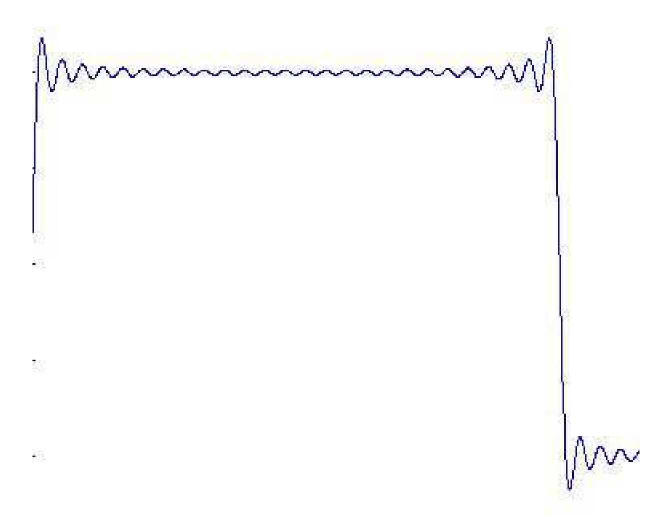


Figure 8.2. Tracé de $\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin 51x}{51}\right)$.

Le premier maximum local se trouve en $x = \frac{\pi}{2n}$ et la valeur est $s_n(\frac{\pi}{2n})$. A mesure que n augmente, l'abscisse de ce maximum s'approche de $x = 0$ et nous allons voir que sa valeur ne tend pas vers $\lim\limits_{x \to 0, x > 0} f(x)$ (qui vaut 1), ce qui confirme la non convergence uniforme de s_n vers f. Le calcul de l'écart entre $\lim s_n(\frac{\pi}{2n})$ et 1 est une manière de mesurer cette non convergence. On peut calculer $\lim s_n(\frac{\pi}{2n})$ de deux manières :

Première manière. L'expression de $s_n(\frac{\pi}{2n})$ ressemble à une somme de Riemann du type

$$A(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)$$

où les x_k vérifient $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ et pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $x_k \in [a + k\,\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\,\frac{b-a}{n}]$. Le calcul de $A(n)$ approxime l'intégrale de g de a à b en découpant $[a, b]$ en n segments de longueurs $\frac{b-a}{n}$ et en construisant un rectangle sur chaque segment $[a + k\,\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\,\frac{b-a}{n}]$ ayant pour hauteur $f(x_k)$. Si nous prenons chaque x_k au milieu de son segment, et affectons les valeurs $a = 0$, $b = \pi$ et $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, alors $A(n)$ s'écrit

$$A(n) = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2n}}{2k+1}$$

La limite de $A(n)$ étant $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$, on trouve $\lim s_n(\frac{\pi}{2n}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Deuxième manière. On part de l'égalité $s_n(\frac{\pi}{2n}) - s_n(0) = \int_0^{\pi/2n} s_n'(x)\,dx$ qui donne $s_n(\frac{\pi}{2n}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2n} \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx$ et on s'inspire de l'identité $\frac{a}{b} = \frac{a}{c} + a(\frac{1}{b} - \frac{1}{c})$ pour transformer cette expression en $s_n(\frac{\pi}{2n}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2n} \frac{\sin 2nx}{x}\,dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2n} \sin 2nx\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)dx$. La première intégrale est indépendante de n puisqu'elle s'écrit $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$ par le changement de variable $2nx = t$. La deuxième fait intervenir la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ clairement définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et qui se prolonge en 0 par continuité (la limite vaut zéro) ; on note φ la fonction ainsi obtenue. On a alors $\left|\int_0^{\pi/2n} \sin 2nx\varphi(x)dx\right| \leqslant \frac{\pi}{2n} \sup_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |\varphi(x)|$ ce qui montre que la deuxième intégrale tend vers zéro et que $s_n(\frac{\pi}{2n})$ converge vers $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Nous pouvons maintenant donner une approximation de $s_n(\frac{\pi}{2n}) - f(\frac{\pi}{2n})$. Soit $x \in]0, \pi]$. D'après le théorème de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}\sin^{(8)}(c)$$

or $\frac{x^8}{8!}\sin^{(8)}(c) = \frac{x^8}{8!}\sin c > 0$ puisque $c \in]0, \pi[$, donc $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$. Ceci étant vrai aussi lorsque $x = 0$, nous pouvons affirmer que $\forall x \in [0, \pi]$, $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ et donc

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!}\right)dt \geqslant \frac{2}{\pi}\left(\pi - \frac{\pi^3}{3.3!} + \frac{\pi^5}{5.5!} - \frac{\pi^7}{7.7!}\right) \approx 1,17$$

Nous avons montré que $s_n(\frac{\pi}{2n}) - f(\frac{\pi}{2n}) \approx 0,17$.

Exercice 8.1. Montrer que la limite de $x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ en zéro est zéro.

Chapitre 9
Equation de la chaleur (1807, 1811, 1822)

C'est à Jean-Baptiste Joseph Fourier que l'on doit les premiers résultat importants dans la théorie qui aujourd'hui porte son nom. Il a étudié les séries trigonométriques dans le but de résoudre l'équation de la chaleur. Voici de quoi il s'agit. On considère une tige droite de longueur infinie et fine au point de négliger son épaisseur. On repère les points de cette tige par un abscisse x. On suppose que des sources de chaleur sont disposées le long de la tige. On suppose également que cette dernière n'échange pas de chaleur avec l'extérieur. On note $u(x,t)$ la température au point x à l'instant t et $\rho(x,\,t)$ la densité de source de chaleur en x à l'instant t. Ceci signifie que la source fournit à l'intervalle de tige $[x, x+dx]$ pendant l'intervalle de temps $[t, t+dt]$ la quantité $\rho(x,t)dxdt$ de chaleur.

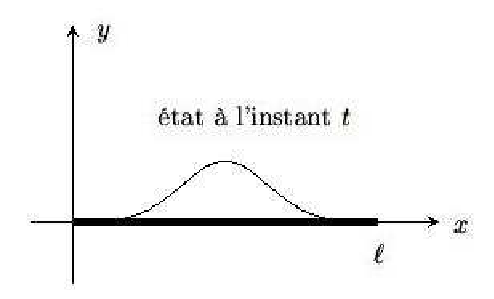


Figure 9.1. Exemple où l'on représente l'état d'une tige de longueur ℓ à un instant t. On voit que plus on s'éloigne du milieu, plus la température est basse.

La fonction de température est alors solution de l'équation aux dérivées partielles

$$c\,\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho$$

où c et γ sont des caractéristiques physiques de la tige ; plus précisément,

- c est la chaleur spécifique linéaire (i.e. la capacité calorifique par unité de longueur),
- et γ la conductivité calorifique.

Cette équation est appelée « équation de la chaleur ».

Supposons pour simplifier les calculs que $\rho = 0$ et $\frac{\gamma}{c} = 1$, l'équation devient alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{9.1}$$

Ajoutons des conditions limites aux solutions recherchées, à savoir :

[1]. La tige est limitée dans l'espace, de $x = 0$ à $x = \pi$.

[2]. La température aux extrémités est toujours nulle : $u(0, \bullet) = u(\pi, \bullet) = 0$.

[3]. A l'instant initial la température est donnée par une fonction f : $u(\bullet, 0) = f$.

Commençons par chercher les solutions particulières de la forme

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

(physiquement cela revient à dire que la température varie comme une courbe à laquelle on applique une affinité, on les appelle solutions stationnaires). C'est la méthode de séparation des variables. L'équation de la chaleur s'écrit maintenant

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T}$$

à condition que X et T ne s'annulent pas, ce que nous supposerons (X sera nulle en 0 et π néanmoins, pour satisfaire à [2]). On en déduit que les rapports $\frac{X''}{X}$ et $\frac{T'}{T}$ sont constants (puisqu'ils ne dépendent pas de la même variable). Notons C cette constante. L'équation de la chaleur équivaut au système

$$\begin{cases} X'' - CX = 0 \\ T' - CT = 0 \end{cases}$$

Si $C > 0$ le lecteur vérifie aisément que la condition [2] conduit à $X = 0$, solution que nous avons rejetée. Même chose si on suppose $C = 0$. Nous avons donc $C < 0$ et nous noterons $C = -\lambda^2$. L'équation en X se résoud en

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

La condition [2] impose $C_1 = 0$ et $C_2 \sin \lambda\pi = 0$. Ainsi $\lambda\pi \in \pi\mathbb{Z}$, i.e. $\lambda \in \mathbb{Z}$. Nous disposons donc d'une infinité de solutions pour X, à savoir les fonctions

$$X_n = A_n \sin nx$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et A_n arbitraires (les n négatifs donnent des solutions redondantes).

Compte tenu de l'égalité $C = -\lambda^2 = -n^2$, l'équation en T s'écrit maintenant

$$T' + n^2 T = 0$$

et se résoud en

$$T(t) = Be^{-n^2 t}$$

Nous disposons donc d'une infinité de solutions, à savoir les fonctions

$$T_n(t) = B_n e^{-n^2 t}$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et B_n arbitraires (les n négatifs donnent des solutions redondantes).

Voici finalement les solutions trouvées en séparant les variables :

$$u_n(x,t) = D_n \sin nx e^{-n^2 t}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et D_n arbitraires (ce sont des solutions vérifiant [1] et [2] mais pas forcément [3]).

L'équation de la chaleur étant linéaire, toute combinaison linéaire (finie) de ces solutions particulières est également solution. Fourier considère alors les sommes *infinies* du type

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin nx e^{-n^2 t}$$

Cette idée géniale est inspirée par la solution de l'équation de la corde vibrante proposée par Bernouilli en 1755. Si une telle série converge, que la somme est dérivable en t et deux fois dérivable en x et que ces dérivations commutent avec la sommation (voir théorème de dérivation des séries de fonctions) alors cette série est solution de l'équation de la chaleur. Par suite, la condition [3] impose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin nx$$

ce qui signifie que les D_n sont les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique impaire obtenue en prolongeant f à $\mathbb{R}$ tout entier. On notera encore f cette fonction. C'est comme cela qu'est apparu le premier développement d'une fonction donnée en une série trigonométrique.

Conclusion. Si f est développable en série de Fourier, l'équation de la chaleur admet une solution qui vérifie les conditions limites [1], [2] et [3], à savoir la fonction $u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin nx e^{-n^2 t}$ où les D_n sont les coefficients de Fourier de f (sous réserve que les hypothèses du théorème de dérivation soient vérifiées !) Nous pouvons même montrer que cette solution est unique.

Soient u_1 et u_2 des solutions de (9.1) vérifiant les conditions limites [1], [2] et [3]. On pose $u = u_1 - u_2$, c'est aussi une solution et donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

d'où

$$u \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et en intégrant selon x de 0 à π,

$$\int_0^{\pi} u \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_0^{\pi} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

Le premier membre de cette égalité s'écrit $\int_0^{\pi} u \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\partial u^2}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi} u^2 dx$ et le second, $\int_0^{\pi} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = - \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$. L'égalité équivaut donc à

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi} u^2 dx = - \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

ce qui signifie que la fonction $h\colon t \mapsto \int_0^{\pi} u^2 dx$ décroît sur $\mathbb{R}_+$ (sa dérivée serait négative) mais $h(0) = 0$ donc $h \leqslant 0$. Comme par ailleurs $h \geqslant 0$, on a $h = 0$ et donc $u = 0$, d'où le résultat.

ERREUR : $h(0)$ ne vaut pas zéro, mais $h(0) = \int_0^{\pi} u(x, 0)^2 dx = \int_0^{\pi} f(x)^2 dx$; ça pose problème... je ne vois pas comment on peut se débrouiller avec ça ! J'ai tenté l'intégration en dt mais ça ne mène à rien non plus...

Chapitre 10
Equation de la corde vibrante (1750)

L'étude de la corde vibrante remonte aux travaux de Brook Taylor (début du $18^{\text{ème}}$ siècle). Les avancées les plus importantes ont lieu aux alentours de 1750 grâce aux travaux de d'Alembert, Euler et Bernouilli.

On fixe un repère (x, t) et on considère une corde tendue entre les points $(0, 0)$ et $(\ell, 0)$. On suppose qu'à l'instant t la corde est représentée par la fonction u_t, ce qui signifie que les points de la corde sont les points de coordonnées $(x, u_t(x))$ où x parcourt $[0, \ell]$. Chaque fonction u_t est donc définie sur $[0, \ell]$. Pour simplifier les choses nous noterons $u(x, t)$ au lieu de $u_t(x)$ et nous dirons que la fonction $u: [0, \ell] \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ représente la forme de la corde à chaque instant.

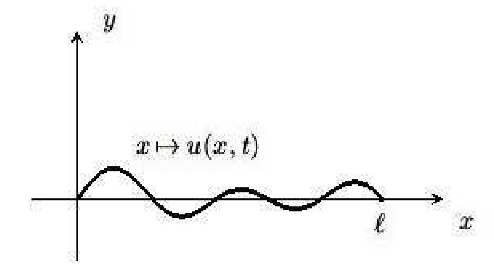


Figure 10.1. Une corde à l'instant t.

La fonction u est alors solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

où

- $c^2 = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$,
- τ est la tension aux extrémités,
- et μ la masse par unité de longueur de la corde.

On doit cette équation à d'Alembert (1749). Pour simplifier sa résolution nous supposerons $c = 1$ et $\ell = \pi$. L'équation devient alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{10.1}$$

Ajoutons des conditions limites :

[1]. La position initiale est donnée par une fonction f ; $u(\bullet, 0) = f$

[2]. La vitesse initiale de chaque point est donnée par une fonction g ; $\frac{\partial u}{\partial t}(\bullet, 0) = g$

[3]. Les extrémités ne bougent pas ; $u(0, \bullet) = u(\pi, \bullet) = 0$.

Comme pour l'équation de la chaleur, nous adoptons ici la méthode de séparation des variables et posons $u(x, t) = X(x)T(t)$. Ceci nous amène à résoudre

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}$$

à condition que X et T ne s'annulent pas, ce que nous supposerons (X sera nulle en 0 et π néanmoins, pour satisfaire à [3]). On en déduit que les rapports $\frac{X''}{X}$ et $\frac{T''}{T}$ sont constants (puisqu'ils ne dépendent pas de la même variable). Notons C cette constante. L'équation de la corde équivaut au système

$$\begin{cases} X'' - CX = 0 \\ T'' - CT = 0 \end{cases}$$

Si $C > 0$ le lecteur vérifie aisément que la condition [3] conduit à $X = 0$, solution que nous avons rejetée. Même chose si on suppose $C = 0$. Nous avons donc $C < 0$ et nous noterons $C = -\lambda^2$. L'équation en X se résoud en

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

La condition [3] impose $C_1 = 0$ et $C_2 \sin \lambda\pi = 0$. Ainsi $\lambda\pi \in \pi\mathbb{Z}$, i.e. $\lambda \in \mathbb{Z}$. Nous disposons donc d'une infinité de solutions pour X, à savoir les fonctions

$$X_n = A_n \sin nx$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et A_n arbitraires (les n négatifs donnent des solutions redondantes).

Compte tenu de $C = -\lambda^2 = -n^2$, l'équation en T s'écrit maintenant

$$T'' + n^2 T = 0$$

et se résoud en

$$T(t) = C_3 \cos nt + C_4 \sin nt$$

Nous disposons donc d'une infinité de solutions, à savoir les fonctions

$$T_n(t) = B_n \cos nt + D_n \sin nt$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et B_n, D_n arbitraires (les n négatifs donnent des solutions redondantes).

Voici finalement les solutions trouvées en séparant les variables :

$$u_n(x,t) = \sin nx\,(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et α_n, β_n arbitraires. Ce sont des solutions vérifiant la condition [3].

L'équation de la corde vibrante étant linéaire, Bernouilli a l'idée géniale en son temps (1755) de considérer les sommes infinies du type

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx\,(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

Si une telle série converge, que la somme est dérivable deux fois en t et x et que les dérivations partielles commutent avec la sommation alors cette série est solution de l'équation de la corde. La condition [1] impose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx$$

tandis que la condition [2] impose

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n \sin nx$$

Pour simplifier les choses, les fonctions impaires 2π-périodiques prolongeant f et g sur $\mathbb{R}$ seront abusivement notées f et g, respectivement.

Conclusion. Nous avons montré que si les fonctions données f et g sont développables en séries trigonométriques, alors la fonction

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \left(b_n(f) \cos nt + \frac{b_n(g)}{n} \sin nt \right)$$

est une solution de (10.1) vérifiant les conditions limites [1], [2] et [3] (à condition toutefois que cette fonction soit deux fois dérivable selon x et t et qu'elle vérifie le théorème de dérivation des séries).

Chapitre 11
Quelques repères historiques

Les séries trigonométriques font leur apparition vers 1400 en Inde, dans les travaux de Madhava de Sangamagrama. En occident il faut attendre les travaux de James Gregory, au $17^{\text{ème}}$ siècle pour les voir surgir. C'est grâce à *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, ouvrage écrit par Brook Taylor en 1715, que l'étude de la corde vibrante et de la propagation du son deviennent les thèmes majeurs de la recherche pendant tout le $18^{\text{ème}}$ siècle. En 1749, Jean Le Rond d'Alembert détermine l'équation de la corde vibrante qu'il résoud analytiquement. En 1755, Daniel Bernouilli propose une autre résolution de cette équation : il a l'idée géniale et audacieuse d'exprimer les solutions comme des sommes infinies du type

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin nx \cos n\alpha t$$

Cela lui vaudra une contreverse avec Leonhard Euler qui ne croit pas qu'une telle expression puisse coïncider avec une autre expression sur un intervalle, sans lui être égale en les autres points de $\mathbb{R}$ (l'expression $\pi + 2\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ par exemple, coïncide pourtant avec l'expression x sur $]0, 2\pi[$ et pas aillleurs...)

En 1799, Marc-Antoine Parseval énonce son fameux théorème sans le démontrer, en se contentant simplement d'affirmer qu'il s'agit d'un résultat évident ! Il l'utilisera pour résoudre des équations différentielles dans son mémoire de 1801.

Dans les années 1807, 1811 et 1822, Joseph Fourier (s'appuyant sur des travaux de Joseph Louis Lagrange et de Christian Huygens) publie des études sur l'équation de la chaleur où il est question là aussi des séries trigonométriques. Il y développe deux méthodes pour le calcul des coefficients a_n et b_n d'une fonction donnée : une méthode par résolution de systèmes linéaires infinis (décrite dans [3], page 272) et une méthode par intégration, à savoir les fameuses formules :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\,dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt\,dt$$

Il savait que rien ne prouve en général la convergence de la série ainsi définie. Ces résultats déclencheront eux aussi la contreverse.

En 1819, Deflers, puis en 1820, Siméon Denis Poisson, donnent les premiers théorèmes de convergence (valables en fait pour les fonctions de classe C^2). En 1829, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet publie son fameux théorème de convergence. Il sera corrigé plus tard par Camille Jordan.

En 1848, Henry Wilbraham découvre le phénomène de Gibbs sans que personne n'y prête attention. En 1898, Albert Michelson observe ce phénomène grâce à un appareil mécanique mais il l'attribue à un défaut de conception de l'appareil. C'est Willard Gibbs qui comprendra qu'il s'agit d'un phénomène mathématique, et c'est Maxime Bôcher qui en donnera l'explication défintive en 1906.

En 1867, Bernhard Riemann publie un mémoire sur les séries trigonométriques d'une importance majeure. Il y définit rigoureusement la notion d'intégrale et propose son fameux lemme ainsi que d'autres résultats importants. Dans les années 1870, Georg Cantor publie une série d'articles sur les séries de Fourier qui le pousseront à introduire la théorie des ensembles. Son résultat le plus connu est le théorème d'unicité (si deux séries trigonométriques convergent en chaque point de $\mathbb{R}$ en coïncidant, alors ces deux séries ne font qu'une).

En 1873, Paul David Gustave du Bois Reymond propose le premier contre-exemple de fonction continue dont la série de Fourier diverge en $x = 0$. Les travaux de Lipot Fejér de 1900 à 1904 sont d'une grande importance : il propose son théorème de convergence (moyenne de Césaro) et surtout, il a l'idée de régulariser les fonctions en les convolant avec un noyau. Il s'agit d'une idée fondamentale qui sera utilisée dans de nombreux domaines des mathématiques.

Dans les années 1900, Henri Lebesgues introduit une nouvelle intégrale permettant aux séries de Fourier de trouver enfin leur cadre idéal. Ses travaux de 1902 et 1910 apportent de nombreux résultats sur la convergence. En 1907, Pierre Fatou généralise l'égalité de Parseval. Les recherches de Fatou, Frigyes Riesz et Ernst Fisher sur les séries de Fourier donneront naissance à l'analyse fonctionnelle.

L'histoire ne s'arrête pas là, bien sûr. le lecteur trouvera dans [1], [8] et [7] d'autres renseignements.

Chapitre 12
Exercices

12.1 Théorème de projection

Le but de cet exercice est de justifier l'existence de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien. Ce résultat avait été admis au chapitre 2 (théorème 2.4).

Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $x \in X$ et toute partie A non vide de X on définit la distance de x à A par

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) \,;\, a \in A\}$$

On dit d'un élément a de A qu'il est une projection de x sur A s'il réalise cette distance, c'est à dire si $d(x, a) = d(x, A)$. En général rien ne garantit ni l'existence ni l'unicité d'un tel élément, même si X est un espace de Banach. Prenons par exemple $X = \mathbb{R}^2$ muni de la norme

$$\|(x_1, x_2)\| = \max \{|x_1|, |x_2|\}$$

$A = [-1, 1] \times \{0\}$ et $x = (0, 1)$. On voit bien que dans cet exemple chaque point de A se trouve à une unité de distance de x. Ainsi x admet une infinité de projections sur A. Si on munit X de la norme euclidienne et on prive A du point origine on constante que x ne possède aucune projection sur A.

Dans ce qui suit E est un espace préhilbertien, C une partie convexe non vide de E et x un élément de E.

1. Montrer que pour tout $(a, b) \in E^2$,

   $$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$$

   (relation connue sous le nom d'identité du parallélogramme)
2. Montrer que si x possède une projection sur C, alors celle-ci est unique.
3. Montrer que si C est complète, alors x possède une projection sur C. Ainsi dans le cas convexe et complet l'existence et l'unicité de la projection sont garantis.
4. Montrer que pour tout $(a, b, c) \in E^3$,

   $$\|a - b\|^2 = \|a - c\|^2 + \|b - c\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle a - c, b - c\rangle$$

   (c'est la formule du triangle)
5. Ici nous supposons uniquement que C est un convexe non vide de E et c un élément de C. Montrer alors que les assertions suivantes sont équivalentes
   i. L'élément c est une projection de x sur c.
   ii. Pour tout $d \in C$, $\mathrm{Re}\langle x - c, d - c\rangle \leqslant 0$.
6. Ici nous supposons uniquement que C est un sous-espace vectoriel de E et c un élément de C. Montrer alors que les assertions suivantes sont équivalentes
   i. L'élément c est une projection de x sur c.
   ii. $x - c \in C^{\perp}$.

7. On suppose que tout x élément de E possède une projection sur C (unique d'après la question 2) notée $P(x)$. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\|P(x) - P(y)\| \leqslant \|x - y\|$$

En déduire la continuité de l'application $P: E \to C$.

8. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que tout élément de E possède une projection (forcément unique) sur F. On note $P(x)$ la projection de x sur F. Montrer que
   a) l'espace E est somme directe de F et $F^\perp$,
   b) l'application P est le projecteur associé à cette somme directe,
   c) P est linéaire, continue, de noyau $F^\perp$ et de norme 1 (sauf si F est réduit à $\{0\}$, auquel cas P est l'application nulle),
   d) l'application $\mathrm{Id}_E - P$ est la projection sur $F^\perp$,
   e) $F = F^{\perp\perp}$.
9. Montrer que dans un espace normé, tout sous-espace de dimension finie est complet (et donc fermé).
10. Montrer que dans un espace de préhilbertien tout sous-espace F de dimension finie admet un complémentaire. Montrer que dans un espace de Hilbert tout sous-espace fermé F admet un complémentaire (ce complémentaire est le sous-espace orthogonal à F).
11. Montrer que dans un espace de Hilbert, un sous-espace est dense si et seulement si son orthogonal est réduit à $\{0\}$.

Solution

1. Pour établir l'identité du parallélogramme on part de

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = \langle a+b, a+b \rangle + \langle a-b, a-b \rangle$$

et on utilise les propriétés du produit scalaire...

2. Soient c et d deux projections de x sur C et notons $\delta = d(x, C) = \|x - c\| = \|x - d\|$. L'identité du parallélogramme appliquée à $a = x - c$ et $b = x - d$ donne

$$\|2x - (c+d)\|^2 + \|c-d\|^2 = 2\|x-c\|^2 + 2\|x-d\|^2$$

c'est à dire

$$4\left\|x - \frac{c+d}{2}\right\|^2 + \|c-d\|^2 = 4\delta^2$$

mais la convexite implique que $(c+d)/2$ appartient à C et donc $\left\|x - \frac{c+d}{2}\right\|^2 \geqslant \delta^2$. Nous en déduisons que $\|c-d\|^2 \leqslant 0$ d'où $c = d$.

3. On note $\delta = d(x, C) = \inf\{\|x - c\| ; c \in C\}$. Il existe alors $(c_n ; n \in \mathbb{N}) \in C^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\|x - c_n\| \to \delta$$

Montrons alors que (c_n) est une suite de Cauchy. Soient k, ℓ deux entiers naturels et appliquons l'identité du parallélogramme à $a = x - c_k$ et $b = x - c_\ell$. On obtient

$$\|2x - (c_k + c_\ell)\|^2 + \|c_k - c_\ell\|^2 = 2\|x - c_k\|^2 + 2\|x - c_\ell\|^2$$

d'où

$$\|c_k - c_\ell\|^2 = 2\|x - c_k\|^2 + 2\|x - c_\ell\|^2 - 4\|x - \frac{c_k + c_\ell}{2}\|^2$$

où $(c_k + c_\ell)/2$ appartient à C puisque C est convexe et donc $\|x - \frac{c_k + c_\ell}{2}\|^2 \geqslant \delta^2$. Fixons $\varepsilon > 0$. Pour k et ℓ assez grands nous avons $\|x - c_k\|^2 \leqslant \delta^2 + \frac{\varepsilon}{4}$ et $\|x - c_\ell\|^2 \leqslant \delta^2 + \frac{\varepsilon}{4}$. Il s'ensuit l'inégalité

$$\|c_k - c_\ell\|^2 \leqslant 2\delta^2 + \frac{\varepsilon}{2} + 2\delta^2 + \frac{\varepsilon}{2} - 4\delta^2$$

c'est à dire $\|c_k - c_\ell\|^2 \leqslant \varepsilon$, d'où le résultat. Comme par ailleurs C est complet, cela montre que (c_n) converge vers un élément c de C. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité

$$\delta \leqslant \|x-c\| \leqslant \|x-c_n\| + \|c_n - c\|$$

on obtient $\|x-c\| = \delta$. L'élément c est donc une projection de x sur C.

4. On a $\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle x,x\rangle = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$. Ainsi $\|a-b\|^2 = \|(a-c)-(b-c)\|^2 = \|a-c\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle a-c, b-c\rangle + \|b-c\|^2$.
5. On procède en deux temps.

   (i) $\Rightarrow$ ***(ii)*.** Soit $d \in C$. D'après la question 4 on a

   $$\|x-d\|^2 = \|x-c\|^2 + \|d-c\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x-c, d-c\rangle$$

   c'est à dire

   $$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\langle x-c, d-c\rangle &= \|x-c\|^2 + \|d-c\|^2 - \|x-d\|^2 \\ &\leqslant \|x-d\|^2 + \|d-c\|^2 - \|x-d\|^2 \\ &\leqslant \|d-c\|^2 \end{aligned}$$

   Ceci étant vrai pour n'importe quel élément d de C, c'est vrai aussi pour l'élément $(1-t)c + td$, si $t \in [0,1]$ et $d \in C$ (n'oublions pas que C est convexe), et dans ce cas l'inégalité précèdente s'écrit

   $$2t\operatorname{Re}\langle x-c, d-c\rangle \leqslant t^2\|d-c\|^2$$

   c'est à dire

   $$2\operatorname{Re}\langle x-c, d-c\rangle \leqslant t\|d-c\|^2$$

   Ceci étant vrai pour tout $t \in [0,1]$, on fait tendre t vers 0 dans cette inégalité et on obtient

   $$\operatorname{Re}\langle x-c, d-c\rangle \leqslant 0$$

   (ii) $\Rightarrow$ ***(i)*.** Soit $d \in C$. On a

   $$\begin{aligned} \|x-d\|^2 &= \|x-c\|^2 + \|d-c\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x-c, d-c\rangle \\ &\geqslant \|x-c\|^2 + \|d-c\|^2 \\ &\geqslant \|x-c\|^2 \end{aligned}$$

   d'où le résultat.

   Remarque. Si E est un espace préhilbertien réel, on sait que $\langle a,b\rangle = \|a\|\,\|b\|\cos(a,b)$ où l'angle (a,b) est un nombre compris entre 0 et π. L'assertion (ii) signifie que l'angle compris entre $x-c$ et $d-c$ est supérieur à $\pi/2$, ce qui correspond parfaitement à l'idée intuitive que l'on se fait de la projection.

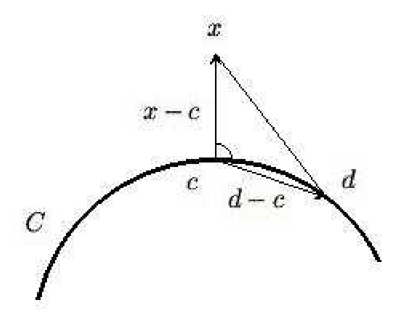


Figure 12.1. Cas réel. L'angle compris entre $x-c$ et $d-c$ est obtus.

6. C est un sous-espace vectoriel de E, donc c'est une partie convexe non vide, et nous pouvons lui appliquer le résultat de la question précèdente. Procédons en deux temps :

   (ii) $\Rightarrow$ ***(i)*.** On suppse que $x - c \in C^\perp$. Soit $d \in C$. On a $d - c \in C$ et donc $(x-c) \perp (d-c)$, c'est à dire $\langle x-c, d-c\rangle = 0$ et à fortiori $\operatorname{Re}\langle x-c, d-c\rangle \leqslant 0$. Ceci étant vrai pour tout $d \in C$, la question 5 permet alors de conclure.

(i) ⇒ (ii). On suppose que c est la projection de x sur C. D'après la question précèdente, pour tout $d \in C$, on a

$$\mathrm{Re}\,\langle x-c, d-c\rangle \leqslant 0$$

L'inégalité précèdente appliquée à $d+c$ (qui est bien dans C) donne

$$\mathrm{Re}\,\langle x-c, d\rangle \leqslant 0$$

et ceci est vraie pour tout $d \in C$. Cette dernière appliquée à $\langle x-c, d\rangle\, d$ (qui est bien dans C) donne

$$\mathrm{Re}\left(\overline{\langle x-c, d\rangle}\,\langle x-c, d\rangle\right) \leqslant 0$$

c'est à dire $\langle x-c, d\rangle = 0$, et ceci pour tout $d \in C$.

7. On a

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \|(x-y-P(x)+P(y)) + (P(x)-P(y))\|^2\\ &= \|x-y-P(x)+P(y)\|^2 + \|P(x)-P(y)\|^2\\ &\quad + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x-y-P(x)+P(y), P(x)-P(y)\rangle\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\langle x-y-P(x)+P(y), P(x)-P(y)\rangle &= \mathrm{Re}\,\langle (x-P(x))-(y-P(y)), P(x)-P(y)\rangle\\ &= \mathrm{Re}\,\langle x-P(x), P(x)-P(y)\rangle\\ &\quad - \mathrm{Re}\,\langle y-P(y), P(x)-P(y)\rangle\\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

d'après la question 5 (assertion ii). Il s'ensuit que $\|x+y\|^2 \geqslant \|P(x)+P(y)\|^2$, d'où l'inégalité demandée. La continuité de P est une conséquence directe de cette inégalité.

8.

a) b) c). Nous savons déjà que F et $F^\perp$ sont en somme directe (c'est un résultat général). Soit $x \in E$. Alors $x = (x-P(x)) + P(x)$ où $x - P(x) \in F^\perp$ (question précèdente, assertion iii) et $P(x) \in F$. Ceci prouve que $E = F \oplus F^\perp$ et que P est la projection sur F associée à cette décomposition.

Remarque. Il s'agit même d'une somme directe topologique puisque P est continue.

D'après le théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \|x - P(x)\|^2 + \|P(x)\|^2$, donc $\|P(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$, i.e. $\|P(x)\| \leqslant \|x\|$. Ainsi $\|P\| \leqslant 1$. Si $F \neq \{0\}$, la restriction de P à F est l'identité de F, par conséquent $\|P\| = 1$.

d). D'après la question 6 il s'agit de montrer que $(x - (\mathrm{Id}_E - P)(x)) \perp F^\perp$. Or $x - (\mathrm{Id}_E - P)(x) = P(x)$ et $P(x) \in F$, d'où le résultat.

e). Nous que l'inclusion $F \subset F^{\perp\perp}$ est vraie en général. Prouvons l'inclusion inverse. Soit $x \in F^{\perp\perp}$. De $P(x) \in F$ on déduit $P(x) \in F^{\perp\perp}$. Ainsi $x - P(x) \in F^{\perp\perp}$. Mais $x - P(x) \in F^\perp$, par conséquent $x - P(x) = 0$, donc $x = P(x)$ et $x \in F$.

9. Supposons que E est un espace normé et F un sous-espace de dimension $n \in \mathbb{N}$. Il existe alors un isomorphisme d'espaces vectoriels $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to F$. Cette application est continue (la source est de dimension finie), donc uniformément continue (on a muni $\mathbb{K}^n$ d'une norme, n'importe laquelle, elles sont toutes équivalentes). Ainsi F est l'image uniforme-continue de $\mathbb{K}^n$ qui est complet. Ceci prouve que F est un sous-espace complet de E, d'où le résultat. Une autre manière de conclure est de voir que F muni de la norme induite par E est isomorphe, en tant qu'espace normé à $\mathbb{K}^n$ muni d'une certaine norme N (la norme image via φ^{-1} en fait). Mais nous savons que N est équivalente à la norme euclidienne et que $(\mathbb{K}^n, N)$ est complet, d'où le résultat. Il existe encore d'autres manières de montrer ce résultat...

10. Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie. Puisque F est converxe, complet et non vide, la projection $P\colon E \to F$ est définie et d'après la question 8, E est somme directe de F et $F^{\perp}$. Dans le cas où E est un espace de Hilbert et F fermé alors F est complet et on se ramène au cas précédent.

11. Soit E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de E. Le sous-espace $\bar{F}$ étant fermé, nous avons $E = \bar{F} \oplus \bar{F}^{\perp}$ (question précèdente). Montrons l'affirmation suivante :

    Affirmation. F et son adhérence $\bar{F}$ ont le même espace orthogonal.

    Démonstration. De l'inclusion $F \subset \bar{F}$ on déduit $F^{\perp} \supset \bar{F}^{\perp}$. Soit $x \in F^{\perp}$. Il s'agit de montrer que x est orthogonal à tous les éléments qui adhérent à F. Soit y un tel élément. Alors il existe une suite (y_n) d'éléments de F qui converge vers y. De l'égalité

$$\langle x, y_n \rangle = 0$$

(vraie pour tout n) et de la continuité de l'application $\langle x, \bullet \rangle$ on déduit en passant à la limite que

$$\langle x, y \rangle = 0$$

◊

Il s'ensuit que $E = \bar{F} \oplus F^{\perp}$. L'équivalence entre « F dense dans E » et « $F^{\perp} = \{0\}$ » est maintenant évidente.

12.2 Une équation différentielle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + 25\,y = \max\,(0, \sin x)$$

Cet exercice vient de [12].

Solution

L'équation homogène E_0 associée

$$y'' + 25\,y = 0$$

a pour solutions les fonctions

$$y = A \cos 5x + B \sin 5x$$

où A et B sont des constantes réelles arbitraires. On en déduit que les solutions de l'équation proposée sont les fonctions

$$y = A \cos 5x + B \sin 5x + y_0$$

où y_0 est une solution particulières. Tout l'intérêt de cet exercice est la recherche de y_0. Notre stratégie consiste à chercher y_0 sous la forme d'une série trigonométrique. Nous commençons par développer $f = \max\,(0, \sin x)$ en série trigonométrique. On trouve facilement

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \\ a_{2k} = \frac{2}{\pi\,(1 - 4k^2)} \end{cases}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et

$$a_{2k+1} = 0$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour calculer les coefficients b_n on remarque que f est « presque » paire. En effet si on pose $g(x) = f(x) - \frac{1}{2} \sin x$, on obtient une fonction g qui elle est paire. Pour le voir il suffit de discuter selon le cas où $x \in [0, \pi]$ et la cas où $x \in [\pi, 2\pi]$. Ensuite on utilise la linéarité de b_n :

$$b_n(f) = b_n(g + \frac{1}{2}\sin) = b_n(g) + \frac{1}{2}\,b_n(\sin) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Supposons que y_0 est une fonction développable en série trigonométrique en tout x :

$$y_0(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx \tag{12.1}$$

Supposons également que y_0 est dérivable et que sa dérivée se calcule en dérivant la série précédente « terme à terme » :

$$y_0'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n \sin nx + \sum_{n=1}^{+\infty} n\,b_n \cos nx$$

Supposons aussi que y_0' est dérivable et que sa dérivée se calcule elle aussi en dérivant terme à terme :

$$y_0''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\,a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\,b_n \sin nx \tag{12.2}$$

En fait, au regard du théorème de dérivation des séries de fonctions, il suffit de supposer tout simplement que

1. la série (12.1) converge au moins simplement,
2. la série (12.2) converge uniformément.

La linéarité de $p_n(\bullet)$ permet d'écrire que

$$y_0''(x) + 25\,y_0(x) = 25\,a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (25\,a_n - n^2\,a_n) \cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty} (25\,b_n - n^2\,b_n) \sin nx$$

Ainsi l'égalité

$$y_0''(x) + 25\,y_0(x) = \max(0, \sin x)$$

(qui est vraie pour tout x) s'écrit

$$\max(0, \sin x) = 25\,a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (25\,a_n - n^2\,a_n) \cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty} (25\,b_n - n^2\,b_n) \sin nx$$

Les séries associées à y_0, y_0' et y_0'' étant supposées absolument convergentes, la série du membre de droite est elle aussi absolument convergente. Ceci implique que les séries de Fourier associées aux deux membres ne font qu'une, autrement dit que

$$\left\{\begin{array}{rcl} 25\,a_0 &=& \frac{1}{\pi} \\ 25\,b_1 - b_1 &=& \frac{1}{2} \\ 25\,a_{2k} - 4k^2\,a_{2k} &=& \frac{2}{\pi\,(1-4k^2)} \\ 25\,a_{2\ell+1} - (2\ell+1)^2\,a_{2\ell+1} &=& 0 \\ 25\,b_n - n^2\,b_n &=& 0 \end{array}\right.$$

pour tous $k \in \mathbb{N}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On trouve

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 &=& \frac{1}{25\,\pi} \\ b_1 &=& \frac{1}{48} \\ a_{2k} &=& \frac{2}{\pi\,(1-4k^2)\,(25-4k^2)} \\ a_{2\ell+1} &=& 0 \\ b_n &=& 0 \end{array}\right.$$

pour tous $k \in \mathbb{N}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 5\}$. Nous n'avons pas pu conclure à la nullité de b_5. Ceci étant dit, nous pouvons prendre $b_5 = 0$ puisque $b_5 \sin 5x$ est solution de l'équation homogène.

Finalement, la fonction y_0 définie par

$$y_0 = \frac{1}{25\pi} + \frac{\sin x}{48} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)(25-4n^2)} \cos 2nx$$

paraît être un bon candidat, à condition qu'elle vérifie tous les présupposés. Heureusement il est facile de voir que

- cette série converge au moins ponctuellement,
- la série des dérivées secondes converge normalement,
- chaque terme est deux fois dérivable.

Par conséquent la fonction y_0 est bien définie et vérifie l'équation proposée.

12.3 Un contre-exemple intéressant

Le premier contre-exemple d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge fut découvert par Paul David Gustave du Bois Reymond en 1873.

La fonction définie par la série de terme général $\frac{1}{n^2} \sin(2^{n^2+1} x) \sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{\sin kx}{k}$ *est continue et sa série de Fourier diverge en zéro. Pour établir la convergence normale de cette série nous étudions d'abord les fonctions* $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n}$.

Cet exercice vient de [2].

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction s_n sur $\mathbb{R}$ par

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$$

Pour tout $x \in]0, \pi[$ on pose $N_x = E(\frac{\pi}{x})$. Montrer que pour tout $x \in]0, \pi[$,

$$\left| \sum_{k=1}^{N_x} \frac{\sin kx}{k} \right| \leqslant \pi$$

2. Etablir la formule d'Abel :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

où (a_k) et (b_k) sont des suites de nombres réels et $A_k = a_m + \ldots. + a_k$ pour tout $k \geqslant m$.

3. Pour tout $x \in]0, \pi[$ et $n > N_x$ on pose $A_n(x) = \sum_{k=N_x+1}^{n} \sin kx$. Montrer que

$$|A_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{x}$$

4. Déduire des deux questions précèdentes que pour tout $x \in]0, \pi[$ et $n > N_x$,

$$\left| \sum_{k=N_x+1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| \leqslant 1$$

5. Montrer que la famille des fonctions $(s_n(x); n \in \mathbb{N}^*)$ est uniformément bornée sur $]0, \pi[$.
6. En déduire que cette même famille est uniformément bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit maintenant la fonction u_n sur $\mathbb{R}$ par

$$u_n(x) = \sin(2^{n^2+1} x) \sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{\sin kx}{k}$$

Montrer que la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n^2}$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que nous noterons f.

8. Déterminer la série de Fourier de f.
9. Montrer que la série de Fourier de f en zéro diverge. Conclure.

Solution

1. En utilisant la majoration classique $|\mathrm{sint}| \leqslant |t|$ on trouve $|\sum_{k=1}^{N_x} \frac{\sin kx}{k}| \leqslant x \sum_{k=1}^{N_x} \frac{1}{k} \leqslant x N_x$ (on a majoré chaque $1/k$ par 1). Or par définition $N_x \leqslant \frac{\pi}{x}$ donc $x N_x \leqslant \pi$, d'où le résultat.
2. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= a_m b_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k \\
&= a_m b_m + \sum_{k=m+1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k \\
&= a_m b_m + \sum_{k=m+1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m+1}^{n} A_{k-1} b_k \\
&= a_m b_m + \sum_{k=m+1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_{k+1} \\
&= a_m b_m + A_n b_n - A_m b_{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})
\end{aligned}$$

d'où la formule d'Abel, si on tient compte de $a_m = A_m$.

3. Calculons $A_n(x)$:

$$\begin{aligned}
A_n(x) &= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=N_x+1}^{n} e^{ikx} \right) = \mathrm{Im}\left(e^{i(N_x+1)x} \frac{1 - e^{i(n-N_x)x}}{1 - e^{ix}} \right) \\
&= \mathrm{Im}\left(e^{i(N_x+1)x} \frac{e^{i\frac{n-N_x}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{-i\frac{n-N_x}{2}x} - e^{i\frac{n-N_x}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \right) \\
&= \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{N_x+n+1}{2}x} \frac{\sin \frac{n-N_x}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \right) = \frac{\sin \frac{N_x+n+1}{2} x \sin \frac{n-N_x}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\left| A_n(x) \right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

Il suffit maintenant d'appliquer la majoration classique

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi} t \leqslant \sin t$$

à $t = \frac{x}{2}$ pour arrivier au résultat.

4. En appliquant la formule d'Abel à $\sum_{k=N_x+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$ on obtient

$$\sum_{k=N_x+1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \frac{A_n(x)}{n} + \sum_{k=N_x+1}^{n-1} A_k(x) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

d'où

$$\left| \sum_{k=N_x+1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| \leqslant \frac{\pi}{x} \left(\frac{1}{n} + \sum_{k=N_x+1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right) = \frac{\pi}{x} \frac{1}{N_x+1}$$

or $\frac{\pi}{x} < N_x + 1$ par définition, d'où le résultat.

5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \pi[$. Si $N_x \geqslant n$, alors nous avons d'après la question 1, $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \pi$. Supposons maintenant que $N_x < n$. Dans ce cas nous avons
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{N_x} \frac{\sin kx}{k}\right| + \left|\sum_{k=N_x+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \pi + 1.$$
Dans tous les cas la famille (s_n) est uniformément bornée par $\pi + 1$ sur $]0, \pi[$.
6. Pour étendre ce résultat à $\mathbb{R}$, il suffit de remarquer que chaque s_n est 2π-périodique, impaire et s'annule en 0 et π.
7. D'après la question précèdente, le terme général de cette série vérifie
$$\left\|\frac{u_n}{n^2}\right\|_\infty \leqslant \frac{\pi + 1}{n^2}$$
d'où la convergence normale sur $\mathbb{R}$.
8. Puisque la convergence est normale, la somme f est continue et 2π-périodique et admet bien une série de Fourier. Le terme général étant impair, f est aussi impaire et tous les b_p sont nuls. Par ailleurs
$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n^2}\, dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} u_n\, dx$$
puisque la convergence est normale. Calculons chacune de ces intégrales :
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} u_n\, dx &= \int_0^{2\pi} \sin(2^{n^2+1} x) \sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{\sin kx}{k}\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \sin(2^{n^2+1} x) \sin kx\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{1}{k} \pi \delta_{2^{n^2+1}}^{k} \end{aligned}$$
mais pour les valeurs décrites ici par k on n'a jamais l'égalité $k = 2^{n^2+1}$, donc $a_0 = 0$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Un calcul analogue donne
$$a_p = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} u_n \cos px\, dx$$
Calculons ces intégrales pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} u_n(x) \cos px\, dx &= \int_0^{2\pi} \sin(2^{n^2+1} x) \sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{\sin kx}{k} \cos px\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \sin(2^{n^2+1} x) \sin kx \cos px\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{1}{2k} \left(\int_0^{2\pi} \sin(2^{n^2+1} x) \sin(k+p) x\, dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \sin(2^{n^2+1} x) \sin(k-p) x\, dx \right) \end{aligned}$$
d'après l'égalité $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big)$. On trouve
$$\int_0^{2\pi} u_n(x) \cos px\, dx = \sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{\pi}{2k} \left(\delta_{2^{n^2+1}}^{k+p} + \delta_{2^{n^2+1}}^{k-p} \right)$$

Or pout toutes les valeurs décrites ici par k, il est impossible d'avoir l'égalité $k-p=2^{n^2+1}$ (k est trop petit pour être égal à 2^{n^2+1}, à fortiori si on lui retranche p). Par conséquent

$$\int_0^{2\pi} u_n(x)\cos px\,dx=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{2^{n^2}}\frac{\delta_{2^{n^2+1}}^{k+p}}{k}$$

Nous avons donc

$$a_p=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2^{n^2}}\frac{\delta_{2^{n^2+1}}^{k+p}}{k}$$

Pour chaque n, l'égalité $k+p=2^{n^2+1}$ équivaut à $k=2^{n^2+1}-p$, et ne peut avoir lieu que si $2^{n^2+1}-p$ est dans $\{1,\ldots,2^{n^2}\}$, auquel cas cette égalité n'a lieu que pour une valeur de k. Ainsi, si n vérifie la propriété

$$1\leqslant 2^{n^2+1}-p\leqslant 2^{n^2} \tag{12.3}$$

le terme associé à ce n contribue à la somme de la valeur $\frac{1}{n^2}\frac{1}{2^{n^2+1}-p}$. Dans le cas contraire, le terme n n'apporte rien. Notons donc $\mathcal{S}_p=\{n\in\mathbb{N}^*\,;1\leqslant 2^{n^2+1}-p\leqslant 2^{n^2}\}$. On a

$$a_p=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathcal{S}_p}\frac{1}{n^2\,(2^{n^2+1}-p)}$$

Finalement, la série de Fourier de f est

$$S(x)=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{n\in\mathcal{S}_p}\frac{1}{n^2\,(2^{n^2+1}-p)}\right)\cos px$$

9. On a $S(0)=\sum_{p=1}^{+\infty}a_p=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{n\in\mathcal{S}_p}\frac{1}{n^2\,(2^{n^2+1}-p)}\right)$, série de terme général assez compliqué puisqu'il est lui-même une série !)

Pour l'étudier nous allons montrer que la tranche

$$\sum_{p=2^{n^2}}^{2^{n^2+1}-1}a_p$$

ne tend pas vers zéro, ce qui contredit le critère de Cauchy (compte tenu du fait que les bornes de sommation tendent vers $+\infty$). Fixons donc n.

Pour chaque $p\in\{2^{n^2},\ldots,2^{n^2+1}-1\}$ de la somme ci-dessus, n possède la propriété (12.3), autrement dit $n\in\mathcal{S}_p$, ainsi a_p reçoit dans son calcul la contribution de n (au minimum), à savoir $\frac{1}{2n^2\,(2^{n^2+1}-p)}$, ce qui prouve que

$$a_p\geqslant\frac{1}{2n^2\,(2^{n^2+1}-p)}$$

(les termes de la somme définissant a_p sont tous positifs). Il s'ensuit, en sommant sur chaque p que

$$\sum_{p=2^{n^2}}^{2^{n^2+1}-1}a_p\geqslant\sum_{p=2^{n^2}}^{2^{n^2+1}-1}\frac{1}{2n^2\,(2^{n^2+1}-p)}=\frac{1}{2n^2}\left(\frac{1}{2^{n^2}}+\frac{1}{2^{n2}-1}+\ldots+\frac{1}{2}+1\right)$$

De l'équivalence

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}\underset{N\to+\infty}{\sim}\ln N$$

on déduit

$$\frac{1}{2n^2}\left(\frac{1}{2^{n^2}}+\frac{1}{2^{n2}-1}+\ldots+\frac{1}{2}+1\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\ln 2^{n^2}}{2n^2}=\frac{\ln 2}{2}$$

d'où la divergence de la série $\sum a_p$.

Conclusion. La fonction f est continue (d'après la convergence normale établie à la question 7) et sa série de Fourier diverge en $x=0$. Ceci montre qu'il faut certaines hypothèses de régularité, autre que la continuité, pour que la série de Fourier converge ponctuellement.

Remarque 12.1. On trouve dans [6] le contre exemple découvert à son tour par Lipot Fejér. Il s'agit de la fonction f définie par

$$f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q_{n_k}(x)}{k^2}$$

où

$$n_k=2^{k^3}$$

et

$$q_n(x)=2\sin 2nx\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$$

12.4 Polynomes de Bernouilli, séries de Fourier et fonction ζ de Riemann

Nous exposons ici une méthode pour calculer les sommes du type

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2p}}$$

en utilisant la famille des polynomes de Bernouilli.

Cet exercice vient de [3].

1. Montrer qu'il existe une suite unique de polynomes $(B_n\,;n\in\mathbb{N}^*)$ vérifiant
   i. $B_1=X-\frac{1}{2}$.
   ii. Pour tout $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $B_n'=B_{n-1}$.
   iii. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^1 B_n(x)\,dx=0$.
2. Calculer B_2, B_3 et B_4.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $B_n(0)=B_n(1)$.
4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on note β_n la fonction de Dirichlet de période 1 qui coïncide avec B_n sur $]0,\,1[$. Déterminer la série de Fourier de cette fonction et préciser sa convergence. Donner également l'expression en sinus et cosinus de cette série.
5. Pour tout $x>1$ on note $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ (fonction Zêta de Riemann). Exprimer pour chaque entier $k>0$, l'image $\zeta(2k)$ en fonction des polynomes de Bernouilli.

Solution

1. Par récurrence. On suppose que B_1, ..., B_{n-1} sont construits. Soit f la primitive de B_{n-1} qui s'annule en 0. La condition (ii) s'écrit $B_n(x)=f(x)+K$ où K est une constante, et la condition (iii) s'écrit $K=-\int_0^1 f(x)\,dx$. Ainsi B_n existe et est unique.
2. On a $B_2=\frac{X^2}{2}-\frac{X}{2}+K$ avec $K=-\int_0^1\left(\frac{X^2}{2}-\frac{X}{2}\right)dx=\frac{1}{12}$.

   De même, $B_3=\frac{X^3}{6}-\frac{X^2}{4}+\frac{X}{12}+K$ avec $K=-\int_0^1\left(\frac{X^3}{6}-\frac{X^2}{4}+\frac{X}{12}\right)dx=0$.

On trouve de manière analogue $B_4 = \frac{X^4}{24} - \frac{X^3}{12} + \frac{X^2}{24} - \frac{1}{720}$.

3. Avec $n \geqslant 2$ on a $B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(x)\,dx = \int_0^1 B_{n-1}(x)\,dx = 0$, d'où le résultat.

4. Fixons $n \geqslant 2$. Clairement $c_0(\beta_n) = 0$. Fixons $k \in \mathbb{Z}^*$. On a

$$\begin{aligned} c_k(\beta_n) &= \int_0^1 B_n(x)\,e^{-i2\pi kx}\,dx \\ &= -\left[B_n(x)\,\frac{e^{-i2\pi kx}}{i2\pi k}\right]_0^1 + \int_0^1 B_{n-1}(x)\,\frac{e^{-i2\pi kx}}{i2\pi k}\,dx \\ &= \frac{1}{i2\pi k}\int_0^1 B_{n-1}(x)\,e^{-i2\pi kx}\,dx \\ &= \frac{c_k(\beta_{n-1})}{i2\pi k} \end{aligned}$$

Pour $n = 1$ un calcul analogue donne $c_k(\beta_1) = \frac{-1}{i2\pi k}$. Par récurrence nous avons

$$c_k(\beta_n) = \frac{-1}{(i2\pi k)^n}$$

et la série de Fourier de β_n est

$$\mathcal{F}_n(x) = -\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{i2\pi kx}}{(i2\pi k)^n}$$

La fonction β_1 n'est pas continue mais vérifie les hypothèses du théorème de convergence ponctuelle de Dirichlet, donc $\mathcal{F}_1$ converge simplement vers β_1. Pour $n \geqslant 2$, la fonction β_n est continue et C^1 par morceaux, donc la série $\mathcal{F}_n$ converge normalement vers β_n.

Calculons les coefficients a_k et b_k en discutant selon deux cas.

Cas n pair, $n = 2p$. On a

$$\begin{cases} a_k = c_k + c_{-k} = \frac{-2}{(i2\pi k)^{2p}} = \frac{(-1)^{p+1}}{2^{2p-1}\pi^{2p}k^{2p}} \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) = 0 \end{cases}$$

Cas n impair, $n = 2p+1$. On a

$$\begin{cases} a_k = 0 \\ b_k = \frac{(-1)^{p+1}}{2^{2p}\pi^{2p+1}k^{2p+1}} \end{cases}$$

Finalement nous avons

	Série de Fourier
β_{2p}	$\frac{(-1)^{p+1}}{2^{2p-1}\pi^{2p}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{k^{2p}}$
β_{2p+1}	$\frac{(-1)^{p+1}}{2^{2p}\pi^{2p+1}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi kx}{k^{2p+1}}$

Nous retiendrons l'égalité ($p \geqslant 1$)

$$\beta_{2p}(x) = \frac{(-1)^{p+1}}{2^{2p-1}\pi^{2p}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{k^{2p}} \tag{12.4}$$

5. En $x = 0$ l'égalité (12.4) donne

$$B_{2p}(0) = \frac{(-1)^{p+1}}{2^{2p-1}\pi^{2p}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}}$$

c'est à dire

$$\zeta(2p) = (-1)^{p+1}\,2^{2p-1}\,\pi^{2p}\,B_{2p}(0)$$

pour tout entier $p \geqslant 1$. On trouve par exemple

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \\ \zeta(4) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \\ \zeta(6) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945} \end{aligned}$$

12.5 Inégalité de Wirtinger et inégalité isopérimétrique

L'inégalité de Wirtinger est l'ingrédient essentiel permettant d'établir l'inégalité isopérimétrique, inégalité de nature géométrique, exprimant le fait qu'à longueur égale, c'est le cercle qui entoure la plus grande surface.

1. Inégalité de Wirtinger. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, 2π-périodique, de classe C^1 et de valeur moyenne nulle. Montrer l'inégalité
$$\|f\|_2 \leqslant \|f'\|_2$$
2. Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, 2π-périodique, de classe C^1 vérifiant l'égalité
$$\|f\|_2 = \|f'\|_2$$
3. Inégalité isopérimétrique. Montrer que pour toute courbe simple et fermée $\mathcal{C}$ de classe C^2 on a
$$\mathcal{A} \leqslant \frac{\ell^2}{4\pi}$$
où $\mathcal{A}$ désigne l'aire du compact bordé par $\mathcal{C}$ et ℓ la longueur de la courbe. Montrer également que l'égalité n'a lieu que pour le cercle (on pourra donc dire que le cercle de rayon r est la courbe qui entoure la plus grande surface parmi toutes les courbes mesurant $2\pi r$ unités de longueur).

Solution

1. Nous allons calculer $\|f\|^2$ et $\|f'\|^2$ à l'aide du théorème de Parseval (f étant C^1, ce théorème s'applique à f ainsi qu'à f'). Nous pourrons ensuite comparer ces deux quantités grâce à l'égalité
$$c_n(f') = in c_n(f)$$
valable ici puisque f est de classe C^1.

   La moyenne de f étant nulle on a $c_0(f) = 0$. Parseval donne alors
$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \right)$$
D'un autre côté, $c_0(f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}(f(2\pi) - f(0)) = 0$. Parseval donne donc
$$\|f'\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2 \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \right)$$
l'inégalité est maintenant évidente.

2. Si f réalise l'égalité on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \right) \left(n^2 - 1 \right) = 0$$

chaque terme de cette série étant positif, on en déduit que chaque terme est nul, autrement dit que pour tout $n \geqslant 2$, $c_n(f) = c_{-n}(f) = 0$. Il s'ensuit que f est de la forme

$$f(x) = c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} = a\cos x + b\sin x$$

où c_1, c_{-1}, a et b sont des constantes réelles arbitraires. La réciproque étant évidente nous avons trouvé toutes les fonctions f vérifiant l'égalité $\|f\|_2 = \|f'\|_2$.

3. Par homothétie on se ramène à une courbe $\mathcal{C}$ de longueur 2π. L'inégalité à démontrer est alors

$$\mathcal{A} \leqslant \pi$$

Soit

$$\begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (f(t), g(t)) \end{array}$$

une paramétrisation normale de $\mathcal{C}$. On peut par une translation (horizontale) bien choisie se ramener au cas où $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$. Si K désigne la surface bordée par $\mathcal{C}$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \iint_K dx\,dy \\ &= \int_{\mathcal{C}} x\,dy \\ &= \int_0^{2\pi} f(t)\,g'(t)\,dt \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g'(t)^2\,dt \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f'(t)^2\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g'(t)^2\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (f'(t)^2 + g'(t)^2)\,dt \\ &= \pi \end{aligned}$$

la première inégalité est l'application du classique $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$. La deuxième inégalité est l'application à f de l'inégalité de Wirtinger. La dernière égalité est vraie parce que la paramétrisation choisie est normale. Etudions maintenant le cas d'égalité. Supposons donc l'égalité. Dans ce cas tous les termes apparus à droite sur le tableau du dessus sont égaux.

L'égalité entre le quatrième et le cinquième terme donne $\int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt = \int_0^{2\pi} f'(t)^2\,dt$, ce qui prouve, d'après la question 2 que f est de la forme

$$f(t) = a\cos t + b\sin t$$

pour un certain couple de réels (a, b).

L'égalité entre le troisième terme, et le quatrième, donne

$$\int_0^{2\pi} (f(t) - g'(t))^2\,dt = 0$$

c'est à dire $f = g'$. Ainsi g est de la forme

$$g(t) = a\sin t - b\cos t + c$$

pour un certain réel c. Soit t_0 un réel tel que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos t_0$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin t_0$. Soit $r = \sqrt{a^2+b^2}$. Nous avons alors

$$\begin{cases} f(t) = r\cos(t+t_0) \\ g(t) = r\sin(t+t_0) + c \end{cases}$$

ce qui prouve que si $\mathcal{A} = \pi$ alors $\mathcal{C}$ est un cercle. La réciproque est évidente.

12.6 Calcul de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

Cet exercice vient de [12]. Soit $\alpha \in]0, \pi[$. On définit la fonction de Dirichlet f par

$$\begin{cases} f(x) = 1 \text{ si } |x| < \alpha \\ f(x) = 0 \text{ si } \alpha < |x| < \pi \end{cases}$$

1. Montrer les égalités
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} = \frac{\pi - \alpha}{2}$$
et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n^2\alpha}{n^2\alpha} = \frac{\pi - \alpha}{2}$$
en utilisant la série de Fourier associée à f.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ et de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Solution

1. La fonction f est paire donc tous les b_n sont nuls. Le calcul des a_n ne pose aucune difficulté. On trouve
$$a_0 = \frac{\alpha}{\pi}$$
et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$a_n = \frac{2\sin n\alpha}{\pi n}$$
La fonction f étant C^1 par morceaux, le théorème de convergence ponctuelle de Dirichlet donne
$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} \cos nx$$
pour tout réel x. En particulier pour $x = 0$ nous avons
$$1 = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$$
d'où la première égalité. Par ailleurs l'égalité de Parseval s'écrit ici
$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\alpha^2}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^2}\sum \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$$
d'où la deuxième égalité.
2. L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ converge clairement et donc
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \lim_{m\to+\infty} \int_0^m \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$$

Fixons m. On subdivise l'intervalle $[0, m]$ en n segments de longueur $\frac{m}{n}$ pour exprimer $\int_0^m \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$ comme la limite d'une somme de Riemann. On obtient

$$\int_0^m \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{m}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\,\frac{m}{n}}{k^2\,(\frac{m}{n})^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\,\frac{m}{n}}{k^2\,\frac{m}{n}}$$

Cette limite n'est pas sans rappeler la deuxième égalité de la question 1, sauf que, et c'est là la difficulté, la variable n se trouve aussi « à l'intérieur » de la somme. Nous pouvons quand même écrire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 k\,\frac{m}{n}}{k^2\,\frac{m}{n}} = \frac{\pi - \frac{m}{n}}{2}$$

En coupant cette somme en deux on trouve

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\,\frac{m}{n}}{k^2\,\frac{m}{n}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\sin^2 k\,\frac{m}{n}}{k^2\,\frac{m}{n}} = \frac{\pi - \frac{m}{n}}{2}$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\,\frac{m}{n}}{k^2\,\frac{m}{n}} = \frac{\pi - \frac{m}{n}}{2} - r_{m,n}$$

Occupons-nous du « reste » $r_{m,n}$ ainsi apparu. Il est clair que cette quantité converge pour n tendant vers $+\infty$, mais nous avons besoin de savoir comment sa limite dépend du paramètre m :

$$\begin{aligned} r_{m,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\sin^2 k\,\frac{m}{n}}{k^2\,\frac{m}{n}} &\leqslant \frac{n}{m} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \\ &\leqslant \frac{n}{m} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\,(k-1)} \\ &= \frac{n}{m} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt &= \lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi - \frac{m}{n}}{2} - r_{m,n}\right) \\ &= \lim_{m\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \ell_m\right) \end{aligned}$$

où ℓ_m est la limite de $r_{m,n}$ pour n tendant vers $+\infty$. Or nous savons que cette limite est comprise entre 0 et $\frac{1}{m}$, par conséquent

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

Pour calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ nous procédons à une intégration par parties :

$$\int_a^b \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = -\left[\frac{\sin^2 t}{t}\right]_a^b + 2\int_a^b \sin t \cos t\,\frac{1}{t}\,dt$$

en étudiant consciencieusement les limites pour a et b nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t}\,dt$$

Le changement de variable $2t = u$ donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$$

et enfin

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

12.7 Série entière, série de Fourier et calcul intégral

La détermination de la série de Fourier d'une fonction par des moyens détournés est une manière pratique d'obtenir des intégrales du type $\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt$ ou $\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$ lorsque leur calcul direct s'avère insurmontable. C'est ce que nous illustrons ici.

Cet exercice vient de [3]. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1+\cos x}{4-2\cos x}$$

Déterminer la série de Fourier de f.

Solution

Tout d'abord nous signalons que f est bien une fonction de Dirichlet, elle admet donc une série de Fourier. Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{4-2\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}} \\ &= \frac{2+X+X^{-1}}{8-2X-X^{-1}} \\ &= \frac{2X+X^2+1}{8X-2X^2-1} \end{aligned}$$

où l'on a posé $X = e^{ix}$ et multiplié par ce dernier le numérateur et le dénominateur. La division euclidienne donne

$$f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{3X}{X^2-4X+1}$$

On décompose le deuxième terme en éléments simples :

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{X-(2-\sqrt{3})} - \frac{2+\sqrt{3}}{X-(2+\sqrt{3})}\right)$$

On s'inspire maintenant de l'égalité

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

vraie pour tout q de module strictement inférieur à 1, pour trouver

$$\begin{aligned} \frac{1}{X-(2-\sqrt{3})} &= \frac{X^{-1}}{1-(2-\sqrt{3})X^{-1}} \\ &= X^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty} (2-\sqrt{3})^n X^{-n} \end{aligned}$$

égalité justifiée par le fait que $|(2-\sqrt{3})X^{-1}| = |2-\sqrt{3}| < 1$. Finalement,

$$\frac{1}{X-(2-\sqrt{3})} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2-\sqrt{3})^n e^{-(n+1)x}$$

Pour l'autre terme

$$\frac{1}{X-(2+\sqrt{3})}$$

le module de $2+\sqrt{3}$ étant plus grand que 1 nous allons factoriser afin de faire apparaître son inverse qui lui aura un module assez petit. On remarque par ailleurs que l'inverse de $2+\sqrt{3}$ est $2-\sqrt{3}$. On a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{X-(2+\sqrt{3})} &= \frac{1}{(2+\sqrt{3})((2-\sqrt{3})X-1)}\\ &= -\frac{2-\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})X}\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{X-(2+\sqrt{3})}=-\sum_{n=0}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^{n+1}e^{nx}$$

On recolle les morceaux :

$$\begin{aligned}f(x) &= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^{n+1}e^{-(n+1)x}+\sum_{n=0}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^{n}e^{nx}\right)\\ &= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^{m}e^{-mx}+\sum_{n=1}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^{n}e^{nx}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}+\sqrt{3}\sum_{n=1}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^{n}\cos nx\end{aligned}$$

Nous venons de développer f en série trigonométrique. La famille des coefficients de cette série étant absolument sommable nous pouvons affirmer que

1. cette série converge normalement vers f
2. cette série *est* la série de Fourier associée à f.

Remarque. Nous avons établi les identités

$$\left\{\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos x}{4-2\cos x}dx &= (\sqrt{3}-1)\pi\\ \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos x}{4-2\cos x}\cos nx\,dx &= \sqrt{3}\,\pi(2-\sqrt{3})^n\\ \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos x}{4-2\cos x}\sin nx\,dx &= 0\end{aligned}\right.$$

pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

12.8 Série entière, série de Fourier et calcul intégral (suite)

Cet exercice vient de [3]. Soient $a>0$ et $n\in\mathbb{N}$. Calculer

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{\operatorname{ch}a-\sin x}dx$$

et

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{\operatorname{ch}a-\sin x}dx$$

Solution

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on pose $f(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}a-\sin x}$. La fonction f ainsi définie est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Les intégrales demandées sont les coefficients de Fourier réels de f. Fixons $x\in\mathbb{R}$ et notons $X=e^{ix}$. On a

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\operatorname{ch}a-\frac{X-X^{-1}}{2i}}\\ &= \frac{-2iX}{X^2-2i\operatorname{ch}aX-1}\\ &= -\frac{i}{\operatorname{sh}a}\left(\frac{e^a}{X-ie^a}-\frac{e^{-a}}{X-ie^{-a}}\right)\end{aligned}$$

que l'on va essayer de développer en série entière en s'inspirant de la formule

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

vraie si $|q| < 1$. Occupons-nous du premier terme. Il est intéressant de mettre $i e^a$ en facteur au dénominateur puisque $\left|\frac{X}{i e^a}\right| = |e^{-a}| < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{e^a}{X - i e^a} &= i \frac{1}{1 - \frac{X}{i e^a}} \\ &= i \sum_{n=0}^{+\infty} (-i e^{-a} e^{ix})^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n i^{n+1} e^{-na} e^{inx} \end{aligned}$$

Dans l'autre terme, c'est X que l'on mettra en facteur au dénominateur puisque $\left|\frac{i e^{-a}}{X}\right| < 1$. On a

$$\begin{aligned} \frac{e^{-a}}{X - i e^{-a}} &= \frac{e^{-a}}{X} \frac{1}{1 - \frac{i e^{-a}}{X}} \\ &= e^{-a} e^{-ix} \sum_{n=0}^{+\infty} i^n e^{-an} e^{-inx} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} i^n e^{-(n+1)a} e^{i(n+1)x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} i^{n-1} e^{-na} e^{inx} \end{aligned}$$

On recolle les morceaux

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{i}{\operatorname{sh} a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n i^{n+1} e^{-na} e^{inx} - \sum_{n=1}^{+\infty} i^{n-1} e^{-na} e^{inx} \right) \\ &= \frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} i^n e^{-na} ((-1)^n e^{inx} + e^{-inx}) \right) \end{aligned}$$

Notons α_n le terme général de la série ci-dessus. Explicitions α_n en discutant selon la parité de n :

- Cas où n est pair. Alors n s'écrit $n = 2p$ (avec $p \geqslant 1$) et

$$\alpha_{2p} = 2(-1)^p e^{-2pa} \cos px$$

- Cas où n est impair. Alors n s'écrit $n = 2p + 1$ (avec $p \geqslant 0$) et

$$\alpha_{2p+1} = 2(-1)^p e^{-(2p+1)a} \sin (2p+1)x$$

Ainsi $f(x)$ se développe en

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

avec

$$\begin{cases} a_0 &= \frac{1}{\operatorname{sh} a} \\ a_{2p} &= \frac{2(-1)^p e^{-2pa}}{\operatorname{sh} a} \\ b_{2p} &= 0 \\ a_{2p+1} &= 0 \\ b_{2p+1} &= \frac{2(-1)^p e^{-(2p+1)a}}{\operatorname{sh} a} \end{cases}$$

pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Les familles (a_n) et (b_n) des coefficients définissant cette série sont clairement sommables, ce qui prouve que cette série *est* la série de Fourier associée à f. On en déduit les intégrales :

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\operatorname{ch} a - \sin x} = \frac{1}{2\pi \operatorname{sh} a} \\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2px\,dx}{\operatorname{ch} a - \sin x} = \frac{2(-1)^p e^{-2pa}}{\pi \operatorname{sh} a} \\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos (2p+1)x\,dx}{\operatorname{ch} a - \sin x} = 0 \\ \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2px\,dx}{\operatorname{ch} a - \sin x} = 0 \\ \int_0^{2\pi} \frac{\sin (2p+1)x\,dx}{\operatorname{ch} a - \sin x} = \frac{2(-1)^p e^{-(2p+1)a}}{\pi \operatorname{sh} a} \end{cases}$$

pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ (attention aux coefficients $1/\pi$ voire $1/2\pi$ devant les intégrales définissant les a_n et b_n).

12.9 L'algèbre de Banach des fonctions de Dirichlet dont la famille des coefficients de Fourier est sommable

Nous proposons ici d'étudier l'espace des fonctions de Dirichlet dont la famille des coefficients de Fourier est sommable ; espace noté $\mathcal{A}$ dans la leçon (section 5.1).

Cet exercice vient de [3]. Pour $f \in \mathcal{A}$, on note $\|f\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$.

1. Montrer que $\|\bullet\|_1$ est une norme sur $\mathcal{A}$.
2. Montrer que l'espace $(\mathcal{A}, \|\bullet\|_1)$ est complet.
3. Montrer que si f, $g \in \mathcal{A}$, alors $fg \in \mathcal{A}$ et $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_1$ (autrement dit $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach pour la norme 1)

Solution

1. Soient $f, g \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
   - $\|f+g\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f+g)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f) + c_n(g)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} (|c_n(f)| + |c_n(g)|) = \|f\|_1 + \|g\|_1$.
   - $\|\lambda f\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\lambda f)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda c_n(f)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda| |c_n(f)| = |\lambda| \|f\|_1$.
   - $\|f\|_1 = 0 \Longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| = 0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$ (la dernière implicatin vient de l'injectivité de $\mathcal{S}$, conséquence du théorème de Parseval).
2. Soit $(f_k ; k \in \mathbb{N})$ une suite de Cauchy de $\mathcal{A}$ (pour la norme 1). Des inégalités

   $$|c_n(f)| \leqslant \|f\|_1$$

   on déduit que $|c_n(f_k) - c_n(f_\ell)| = |c_n(f_k - f_\ell)| \leqslant \|f_k - f_\ell\|_1$, pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, ce qui prouve que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suite de nombres complexes $(c_n(f_k) ; k \in \mathbb{N})$ est de Cauchy. Le corps $\mathbb{C}$ étant complet, chacune de ces suites possède une limite dans $\mathbb{C}$, notée c_n :

   $$c_n(f_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} c_n$$

   Par ailleurs, (f_k) étant de Cauchy, elle est bornée, autrement dit il existe $M > 0$ tel que $\|f_k\|_1 \leqslant M$, pour tout k. Soit maintenant J une partie finie de $\mathbb{Z}$. De $\sum_{n\in J} |c_n(f_k)| \leqslant \|f_k\|_1$ (vraie pour tout k) on déduit

   $$\sum_{n\in J} |c_n(f_k)| \leqslant M$$

Dans cette inégalité on fait tendre k vers $+\infty$ pour obtenir

$$\sum_{n\in J} |c_n| \leqslant M$$

Ceci étant vrai pour toute partie finie J, la famille $(c_n ; n \in \mathbb{Z})$ est sommable et donc la famille de fonctions $(c_n e_n ; n \in \mathbb{Z})$ est sommable pour la norme infinie, de somme notée

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$$

Nous savons également que les coefficients de Fourier de f sont les c_n. Achevons cette démonstration en montrant que la suite (f_k) converge vers f (en norme 1).

Fixons $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout couple d'entiers (k, ℓ) supérieurs ou égaux à N l'on ait $\|f_k - f_\ell\|_1 \leqslant \varepsilon$. Soit J une partie finie de $\mathbb{Z}$. On a alors pour tous $k, \ell \geqslant N$

$$\sum_{n\in J} |c_n(f_k) - c_n(f_\ell)| \leqslant \varepsilon$$

En faisant tendre ℓ vers $+\infty$ on obtient

$$\sum_{n\in J} |c_n(f_k) - c_n| \leqslant \varepsilon$$

Ceci prouve que $(|c_n(f_k) - c_n| ; n \in \mathbb{Z})$ est sommable de somme inférieure à ε :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f_k) - c_n| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit

$$\|f_k - f\|_1 \leqslant \varepsilon$$

Conclusion : $\mathcal{A}$ est complet pour la norme 1.

Remarque. Nous aurions pu utiliser le fait que $\mathcal{S}: \mathcal{A} \to \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est une isométrie vectorielle ($\mathcal{A}$ étant muni de la norme 1 et $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ de sa norme usuelle) et que $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est un espace de Banach. En fait la démonstration faite ici n'est qu'une transposition de la démonstration classique de la complétude de $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$!

3. Soient $f, g \in \mathcal{A}$. De la sommabilité des familles $(c_n(f) e_n ; n \in \mathbb{Z})$ et $(c_n(g) e_n ; n \in \mathbb{Z})$ nous déduisons (par multiplication) la sommabilité de $(c_m(f) c_n(g) e_{m+n} ; (m, n) \in \mathbb{Z}^2)$ (il s'agit de sommabilité normale pour les normes 1, 2 et infini) avec

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} c_m(f) c_n(g) e_{m+n} = fg$$

et comme on peut sommer dans n'importe quel ordre et en associant comme on veut, on peut écrire

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{m+n=p} c_m(f) c_n(g) \right) e_p = fg$$

La sommabilité étant normale (pour la norme infinie), ceci prouve que $fg \in \mathcal{A}$ avec

$$c_p(fg) = \sum_{m+n=p} c_m(f) c_n(g)$$

De plus

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} |c_p(fg)| \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{m+n=p} c_m(f) c_n(g) \right| \\ &\leqslant \sum_{p\in\mathbb{Z}} \sum_{m+n=p} |c_m(f) c_n(g)| \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\|f\|_1\,\|g\|_1 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(g)|\\ &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}|c_m(f)\,c_n(g)|\\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{m+n=p}|c_m(f)\,c_n(g)|\end{aligned}$$

(d'après la commutativité et l'associativité des sommes pour les familles sommables dans $\mathbb{C}$). L'inégalité recherchée est maintenant établie.

12.10 Cas où les $c_n(f)$ sont positifs

Nous poursuivons ici l'étude de l'espace $\mathcal{A}$. Le but est de donner une nouvelle condition suffisante pour que la série de Fourier d'une fonction de Dirichlet continue soit normalement convergente. Nous rappelons que le théorème de Dirichlet fournit déjà une telle condition.

Cet exercice vient de [3]. Soit f une fonction 2π-périodique continue dont tous les coefficients de Fourier $c_n(f)$ sont positifs.

1. Montrer que la fonction
$$S\ :\ ]0,1[\ \longrightarrow \mathbb{R},\quad r \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\,c_n(f)$$
est bien définie.
2. Exprimer $S(r)$ sous la forme
$$S(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,g(r,t)\,dt$$
où $g(r,\ t)$ qui apparaîtra dans un premier temps comme une somme infinie devra être explicitée.
3. En prenant $f=1$ on calculera $S(r)$ des deux manières offertes par les questions 1 et 2 et on en déduira la valeur de $\int_0^{2\pi} g(r,t)\,dt$.
4. Montrer que la fonction S est bornée.
5. En déduire que la famille $(c_n(f); n\in\mathbb{Z})$ est sommable et que la série de Fourier associée à f converge normalement vers f.

Solution

1. On a
$$\begin{aligned}|c_n(f)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right|\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|\,dt\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}||f||_\infty\,dt=\|f\|_\infty\end{aligned}$$
Fixons $r\in\ ]0,\ 1[$. On a $0\leqslant r^{|n|}\ c_n(f)\leqslant r^{|n|}\ \|f\|_\infty$, pour tout $n\in\mathbb{Z}$. Ceci prouve que $(r^{|n|}\,c_n(f); n\in\mathbb{Z})$ est sommable et donc que $S(r)$ est bien défini.
2. On a $S(r)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\ \frac{1}{2\pi}\ \int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-int}\ dt$. Il se trouve que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $|r^{|n|}\,f(t)e_n(t)|=r^{|n|}\,|f(t)|\leqslant r^{|n|}\,\|f\|_\infty$, ce qui prouve que la famille de fonctions $(r^{|n|}\,fe_n;\ n\in\mathbb{Z})$ est normalement sommable et que l'interversion des symboles $\sum$ est $\int$ est possible :
$$S(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\,e^{-int}\right)dt$$

Nous venons de faire apparaître la fonction g demandée. Calculons $g(r,t)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\,e^{-int} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n\,e^{-int}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\,e^{int}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (re^{-it})^n+\sum_{n=1}^{\infty} (re^{it})^n\\
&= \frac{1}{1-re^{-it}}+\frac{re^{it}}{1-re^{it}}\\
&= \frac{1-r^2}{|1-re^{it}|^2}\\
&= \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}
\end{aligned}$$

Finalement

$$S(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt$$

3. Prenons $f=1$. Les coefficients $c_n(f)$ sont

$$\begin{aligned}
0 &\longmapsto 1\\
n\neq 0 &\longmapsto 0
\end{aligned}$$

donc f satisfait les hypothèses requises pour les questions 1 et 2. Il s'ensuit que

$$\begin{cases} S(r)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\,c_n(f)=1\\ S(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt\end{cases}$$

On en déduit

$$\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt=2\pi$$

4. Fixons $r\in\,]0,1[$. On a

$$\begin{aligned}
|S(r)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt\\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\,\|f\|_\infty\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt=\|f\|_\infty
\end{aligned}$$

La première inégalité est justifiée par le fait que $\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$ est positif.

5. Soit J une partie finie de $\mathbb{Z}$. Les éléments de la famille $(r^{|n|}\,c_n(f)\,;\,n\in\mathbb{Z})$ étant positifs nous avons $\sum_{n\in J} r^{|n|}\,c_n(f)\leqslant\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\,c_n(f)$ d'où $\sum_{n\in J} r^{|n|}\,c_n(f)\leqslant\|f\|_\infty$, d'après la question précédente. En faisant tendre r vers 1 dans cette inégalité nous obtenons $\sum_{n\in J} c_n(f)\leqslant\|f\|_\infty$. Tous les termes étant positifs, ceci prouve que la famille des coefficients $(c_n(f)\,;n\in\mathbb{Z})$ est sommable. On en déduit que la série de Fourier associée à f converge normalement vers f.

12.11 Fonctions höldériennes

Troisième et dernier exercice sur l'espace $\mathcal{A}$. Le but de cet exercice est de trouver une troisième condition suffisante pour qu'une fonction appartienne à $\mathcal{A}$.

Cet exercice vient de [3]. On dit d'une fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ qu'elle est α-höldérienne (α désignant un réel positif) s'il existe un réel M tel que pour tous $x,y\in\mathbb{R}$,

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M\,|x-y|^\alpha$$

Une telle fonction est clairement continue. On note $\mathcal{H}_\alpha$ l'ensemble des fonctions de Dirichlet qui sont α-höldériennes. On montre facilement que $\mathcal{H}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$. Notre objectif est de montrer que si $\alpha > \frac{1}{2}$, le sous-espace $\mathcal{H}_\alpha$ est contenu dans l'espace $\mathcal{A}$. Dans ce qui suit, f désigne une fonction appartenant à $\mathcal{H}_\alpha$.

1. Soient $h > 0$ et f_h la fonction définie par $f_h(x) = f(x-h) - f(x+h)$. Montrer que $f_h \in \mathcal{C}$ et exprimer les coefficients de Fourier de f_h en fonction de ceux de f.
2. En déduire la domination
$$c_n(f) \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$
Indication : prendre $h = \frac{1}{|n|}$ dans la formule établie à la question 1.
3. Etablir grâce à l'égalité de Parseval qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $h > 0$,
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \sin^2 nh \leqslant K h^{2\alpha}$$
4. Pour $N \in \mathbb{N}$ on pose $I_N = \{n \in \mathbb{N}; 2^N \leqslant |n| < 2^{N+1}\}$ et $h = \frac{\pi}{2^{N+1}}$. Trouver un majorant de $\sum_{n\in I_N} |c_n(f)|$ en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à
$$\left(\sum_{n\in I_N} |c_n(f)| \sin nh \frac{1}{\sin nh}\right)^2 \tag{12.5}$$
Ce majorant sera exprimé en fonction de K, π et N. On prendra soin de justifier la bonne définition de (12.5).
5. Déduire de la question précèdente que si $\alpha > \frac{1}{2}$, la série de Fourier de f converge normalement.

Solution

1. Le fait que f_h soit 2π-périodique et continue est évident. On a
$$\begin{aligned} c_n(f_h) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x+h)e^{-inx}\,dx - \int_0^{2\pi} f(x-h)e^{-inx}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(e^{inh}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt - e^{-inh}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right) \\ &= (e^{inh} - e^{-inh})c_n(f) \\ &= 2i\sin nh\, c_n(f) \end{aligned}$$
On notera le changement de variable $x + h = t$ dans la première intégrale et $x - h = t$ dans la deuxième.
2. D'après ce qui précède on a
$$\begin{aligned} 2|\sin nh||c_n(f)| &= |2i\sin nh\, c_n(f)| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x+h) - f(x-h))e^{-inx}\,dx\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x-h)|\,dx \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} M(2h)^\alpha \int_0^{2\pi} dx \\ &= M(2h)^\alpha \end{aligned}$$
En prenant $n \neq 0$ et $h = \frac{1}{|n|}$, l'inégalité précèdente s'écrit
$$2|\sin(1)||c_n(f)| \leqslant M\frac{2^\alpha}{|n|^\alpha}$$

d'où le résultat.

Remarque. Cette domination ne nous servira pas. En effet, la famille $(\frac{1}{n^\alpha}\ ;\ n \in \mathbb{Z})$ étant sommable si et seulement si $\alpha > 1$, nous déduisons de cette question que toutes les fonctions de Dirichlet α-höldériennnes de coefficient $\alpha > 1$ appartiennent à $\mathcal{A}$. Il se trouve que ces fonctions sont constantes !

3. L'égalité de Parseval appliquée à f_h s'écrit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f_h)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_h(x)|^2\,dx$$

or

- $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f_h)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 4\sin^2 nh\,|c_n(f)|^2$ d'après la question 1.
- Le second membre vérifie

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_h(x)|^2\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x-h)-f(x+h)|^2\,dx\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M^2|2h|^{2\alpha}\,dx\\ &= 2^{2\alpha}M^2h^{2\alpha}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sin^2 nh\,|c_n(f)|^2 \leqslant 2^{2\alpha-2}M^2h^{2\alpha}$$

4. Tout d'abord on remarque que pour tout $n\in I_n$, $nh \in]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, puisqu'on a posé $h = \frac{\pi}{2^{N+2}}$. Ceci implique que pour tous ces n, le sinus de nh est non nul et donc la somme (12.5) est bien définie. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n\in I_N} |c_n(f)|\right)^2 &= \left(\sum_{n\in I_N} |c_n(f)|\sin nh\,\frac{1}{\sin nh}\right)^2\\ &\leqslant \left(\sum_{n\in I_N} |c_n(f)|^2\sin nh\right)\left(\sum_{n\in I_N} \frac{1}{\sin^2 nh}\right)\\ &\leqslant Kh^{2\alpha}\left(\sum_{n\in I_N}\frac{1}{\sin^2 nh}\right)\end{aligned}$$

d'après la question 3. Or pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x$ et donc pour tout $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\sin^2 x \geqslant \frac{4}{\pi^2}x^2$, c'est à dire $\frac{1}{\sin^2 x}\leqslant\frac{\pi^2}{4x^2}$. En appliquant cette inégalité à $x = nh$ on obtient

$$\left(\sum_{n\in I_N} |c_n(f)|\right)^2 \leqslant Kh^{2\alpha}\frac{\pi^2}{4h^2}\sum_{n\in I_N}\frac{1}{n^2}$$

Par ailleurs

$$\sum_{n\in I_N}\frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1}\frac{1}{n^2} \leqslant 2\sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1}\frac{1}{2^{2N}} = 2\,\frac{2^N}{2^{2N}} = \frac{2}{2^N}$$

d'où

$$\left(\sum_{n\in I_N} |c_n(f)|\right)^2 \leqslant Kh^{2\alpha-2}\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{2^N} = \frac{K\pi^2}{2^{(N+2)(2\alpha-2)+N+1}}$$

5. Supposons $\alpha > \frac{1}{2}$. On a alors $2\alpha-2\geqslant 0$ et donc $(N+2)(2\alpha-2)+N+1 = 1+N(2\alpha-1)+2(2\alpha-2)\geqslant N(2\alpha-1)$ et l'inégalité de la question précèdente implique

$$\left(\sum_{n\in I_N} |c_n(f)|\right)^2 \leqslant \frac{K\pi^2}{2^{N(2\alpha-1)}}$$

Grâce à cette majoration nous allons montrer que toutes les « tranches » du type

$$\sum_{n=-a}^{b} |c_n(f)|$$

sont majorées par la même constante. Ceci impliquera que toutes les sommes finies d'éléments de la famille $(|c_n(f)|;\ n \in \mathbb{Z})$ sont majorées par cette même constante et donc, compte tenu du fait que les éléments de cette famille sont positifs, que cette famille est sommable. Choisissons un entier naturel N tel que $2^N > \max(a, b+1)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-a}^{b} |c_n(f)| &\leqslant \sum_{n=-2^N}^{2^N-1} |c_n(f)| \\
&= \sum_{k=0}^{N} \sum_{n \in I_k} |c_n(f)| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{N} \sqrt{\frac{K\pi^2}{2^{k(2\alpha-1)}}} \\
&= \sqrt{K}\,\pi \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^{k\frac{2\alpha-1}{2}}} \\
&\leqslant \sqrt{K}\,\pi \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k\frac{2\alpha-1}{2}}}
\end{aligned}$$

où la dernière série est une série géométrique de raison $2^{-(2\alpha-1)/2}$ qui est bien de module strictement inférieur à 1, étant donnée l'hypothèse faire sur α. Nous avons prouvé que la famille des coefficients de Fourier de f est sommable, et donc que sa série de Fourier associée converge normalement vers f.

12.12 Dual topologique de $\mathcal{C}$

On munit l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues de Dirichlet du produit scalaire habituel et on note $\|\bullet\|_2$ la norme associée. On note $\mathcal{C}'$ l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{C}$ (c'est le dual topologique). On munit cet espace de la norme usuelle des applications linéaires continues. Autrement dit, si $\varphi \in \mathcal{C}$ on a

$$\|\varphi\| = \inf\{c \in \mathbb{R}_+ ; \forall f \in \mathcal{C}, |\varphi(f)| \leqslant c\,\|f\|_2\} = \sup_{f \neq 0} \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_2}$$

On note $\ell^2(\mathbb{Z},\ \mathbb{C})$ l'espace des familles de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ de carré sommable. Nous verrons que c'est un espace préhilbertien. Le but de cet exercice est de montrer que le dual topologique de $\mathcal{C}$ est isomorphe à $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ en tant qu'espace normé.

1. Montrer que $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est bien un espace vectoriel complexe. Montrer que si $a = (a_n ; n \in \mathbb{Z})$ et $b = (b_n ; n \in \mathbb{Z})$ sont des familles de nombres complexes de carré sommable, alors $(a_n \bar{b_n} ; n \in \mathbb{Z})$ est sommable. Montrer que la formule

$$\langle a, b\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \bar{b_n}$$

définit un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{Z},\ \mathbb{C})$. Désormais cet espace sera toujours muni de ce produit scalaire. On note $\|\bullet\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire.

2. Pour tout $a \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ on définit $\varphi_a : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ par $\varphi_a(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n c_n(f)$. On définit aussi

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{C}' \\ & & a & \longmapsto & \varphi_a \end{array}$$

Montrer que Φ est bien définie, linéaire et isométrique.

3. Montrer que Φ est surjective.

Solution

1. Montrons que $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Il est clair que λa est de carré sommable. Par ailleurs, de l'inégalité $xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$, on déduit que la famille $ab = (a_n b_n ; n \in \mathbb{Z})$ est sommable (procédé classique). Ensuite, de l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, on déduit que $a+b$ est une famille de carré sommable, d'où le premier résultat.

   Pour montrer que $(a_n \bar{b_n} \; ; \; n \in \mathbb{Z})$ est sommable, on utilise l'inégalité $|a_n \bar{b_n}| \leqslant \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2}$, tout simplement (toujours le même procédé).

   La formule donnée pour $\langle a, b\rangle$ est justifiée par ce qui précède. Le fait qu'elle définisse un produit scalaire ne pose aucune diificulté.

   Remarque. Nous héritons d'une nouvelle inégalité de Cauchy, à savoir :
   Si $(a_n ; n \in \mathbb{Z})$ et $(b_n ; n \in \mathbb{Z})$ sont de carré sommable alors

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n\right| \leqslant \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2} \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^2}$$

   Il est intéressant néanmoins de démontrer cette inégalité directement.

2. Fixons $a \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ et $f \in \mathcal{C}$. D'après l'inégalité de Bessel, la famille des coefficients $(c_n(f) ; n \in \mathbb{Z})$ est de carré sommable. Il s'ensuit que $(a_n c_n(f) ; n \in \mathbb{Z})$ est sommable et donc l'application φ_a bien définie. Les propriétés de la « somme » et la linéarité des $c_n(\bullet)$ impliquent la linéarité de φ_a. Montrons la continuité. On a

$$\begin{aligned} |\varphi_a(f)| &= \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n c_n(f)\right| \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2} \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2} \\ &= \|a\|_2 \|f\|_2 \end{aligned}$$

   (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). On en déduit que φ_a est continue, de norme inférieure ou égale à $\|a\|_2$. Toute ceci montre que Φ est bien définie. La linéarité de Φ ne pose aucun problème. Pour l'aspect isométrique, il ne reste plus qu'à montrer l'inégalité

$$\|\varphi_a\| \geqslant \|a\|_2$$

   Pour toute partie finie J de $\mathbb{Z}$ on note $f_J = \sum_{n\in J} \overline{a_n} e_n$. La fonction f_J est bien dans $\mathcal{C}$ et puisque φ_a est continue,

$$|\varphi_a(f_J)| \leqslant \|\varphi_a\| \|f_J\|_2$$

   autrement dit

$$\left|\sum_{n\in J} \overline{a_n} a_n\right| \leqslant \|\varphi_a\| \sqrt{\sum_{n\in J} |\overline{a_n}|^2}$$

   d'où

$$\sqrt{\sum_{n\in J} |a_n|^2} \leqslant \|\varphi_a\|$$

   ceci étant vrai pour toute partie finie J on en déduit que

$$\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2} \leqslant \|\varphi_a\|$$

   c'est à dire le résultat.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{C}'$. pour tout entier n on pose

$$a_n = \varphi(e_n)$$

Cette idée est inspirée par l'algèbre linéaire en dimension finie où nous savons que si ω est une forme linéaire sur un espace E de base $(e_1, \ldots, e_n)$, alors $\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega(e_k)\, e_k^* = \sum_{k=1}^{n} \omega(e_k)\, c_n(\bullet)$.

Montrons que la famille $(a_n\,; n \in \mathbb{Z})$ est de carré sommable. Pour tout partie finie J de $\mathbb{Z}$, on pose $f_J = \sum_{n \in J} \overline{a_n}\, e_n$. Fixons J. La continuité de φ donne

$$|\varphi(f_J)| \leqslant \|\varphi\|\, \|f_J\|_2$$

d'où l'on déduit (comme à la question précèdente) l'inégalité

$$\sqrt{\sum_{n \in J} |a_n|^2} \leqslant \|\varphi_a\|$$

prouvant que la famille étudiée est bien sommable. Montrons que $\Phi(a) = \varphi$. Il s'agit de montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}$ on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n\, c_n(f) = \varphi(f)$. Fixons f. De la convergence $p_n(f) \longrightarrow f$ en norme 2 nous déduisons, par continuité de φ, la convergence $\varphi(p_n(f)) \longrightarrow \varphi(f)$. Or

$$\varphi(p_n(f)) = \sum_{k=-n}^{n} a_k\, c_k(f)$$

ainsi nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_k\, c_k(f) = \varphi(f)$$

ce qui prouve, compte-tenu de la sommabilité de $(a_n\, c_n(f)\,; n \in \mathbb{Z})$, que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n\, c_n(f) = \varphi(f)$$

et nous avons bien Φ surjective.

Bibliographie

[1] Séries de fourier. *Site web Wikipedia*, 2010. http://wikipedia.org.

[2] R. Dupont. *Séries, séries entières, séries de Fourier, 64 exercices corrigés*. Vuibert, 1997.

[3] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Exercices de mathématiques oraux X-ENS, analyse 2*. Cassini, 2009.

[4] Richard Gomez. Classification des courbes algébriques de degré deux. *Site web Mégamaths*, 2002. http://megamaths.perso.neuf.fr/.

[5] Richard Gomez. Classification des endomorphismes du plan vectoriel. *Site web Mégamaths*, 2002. http://megamaths.perso.neuf.fr/.

[6] Bertrand Hauchecorne. *Les contre-exemples en mathématiques*. Ellipses, 2007.

[7] Hervé Lehning. Naissance des distributions. *Tangente Sup*, (38).

[8] Hervé Lehning. Unicité du développement en série trigonométrique. *Tangente Sup*, (38).

[9] Hervé Lehning. Zêta(2) façon Euler. *Tangente*, (114).

[10] Jacqueline Lelong-Ferrand and Jean-Marie Arnaudies. *Cours de mathématiques, tome 2, analyse*. Dunod Université, 1977.

[11] Karine Madère. *Préparation à l'oral de l'agrégation, leçons d'analyse*. Ellipses, 1997.

[12] Jean Pierre Marco, Philippe Thieullen, and Jacques-Arthur Weil... *Mathématiques L2*. Pearson Education, 2007.

[13] Danny-Jack Mercier. Programme argumenté du CAPES, partie LVI, séries de fourier. *Site web Mégamaths*, 2002. http://megamaths.perso.neuf.fr/.

[14] Walter Rudin. *Principes d'analyse mathématique*. Dunod, 2006.

[15] Claude Wagschal. *Topologie et analyse fonctionnelle*. Hermann, 1995.